
Stanford University Libraries



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Sechsundachtzigster Band.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1879.
Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des sechsundachtzigsten Bandes.

Druckfehler.

S. 150, Formel (1.) statt $\sum\limits_{x}$ lese man $\sum\limits_{\alpha}$.

S. 240, Zeile 17 statt $(F_1 F_2 \dots F_s)2^{s-1}$ lese man $(F_1 F_2 \dots F_s)^{2^{s-1}}$.

S. 245, Satz X statt $\frac{f(\alpha)}{f(\alpha-1)}$ lese man $\frac{f(\alpha)}{f(\alpha+1)}$.

Ueber homogene totale Differentialgleichungen.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

---

§. 1.

Die Integration der totalen Differentialgleichungen zwischen drei Veränderlichen, welche der Integrabilitätsbedingung Genüge leisten, ist von *Euler* an einer Reihe von Beispielen erläutert worden, in denen fast allen die Coefficienten homogene Functionen gleichen Grades sind. (Inst. calc. int. vol. III, 1—26.) Ich stelle mir desshalb hier die Aufgabe, überhaupt die Eigenschaften homogener totaler Differentialgleichungen zwischen n Veränderlichen zu untersuchen. Zu dem Ende schicke ich aus meiner Abhandlung *Ueber das Pfaffsche Problem* (dieses Journal Bd. 82, S. 230), die ich kurz mit $A.$ citiren werde, einige allgemeine Sätze voraus.

Jeder lineare Differentialausdruck

$$(1.)\qquad a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \cdots + a_n\,dx_n = \Sigma a dx,$$

in welchem $a_1, \dots a_n$ Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind, kann auf eine der beiden Formen

$$(2.)\qquad z_{r+1}\,dz_1 + \cdots + z_{2r}\,dz_r$$

oder

$$(2^*.)\qquad dz + z_{r+1}\,dz_1 + \cdots + z_{2r}\,dz_r$$

gebracht werden, wo $z, z_1 \dots z_{2r}$ unabhängige Functionen von $x_1, \dots x_n$ bedeuten. Im ersten Falle heisst er von der $2r$ten, im andern von der $(2r+1)$ten Klasse. Die Klasse p ist gleich der kleinsten Anzahl unabhängiger Variabeln, mittelst deren sich der Differentialausdruck darstellen lässt. Zu ihrer Berechnung dient die folgende Regel. Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten $(m+1)$ten Grades verschwinden, die $m$ten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so nenne ich m den *Rang* der Determinante.

Ist nun

$$(3.)\quad a_{\alpha\beta} = \frac{da_\alpha}{dx_\beta} - \frac{da_\beta}{dx_\alpha},$$

und ist der Rang der schiefen Determinante

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gleich $2r$, der Rang der schiefen Determinante

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 \end{vmatrix}$$

aber gleich $2s$, so ist die Klasse des Differentialausdrucks (1.)

$$(6.)\quad p = r + s.$$

Bei jeder Transformation des Differentialausdrucks sind die Zahlen r, s und daher auch p invariant. Die Invariante r kann auch definirt werden als die kleinste Anzahl cogredienter linearer Relationen, die zwischen den Variabeln $u_1, \dots u_n$; $v_1, \dots v_n$ bestehen müssen, damit die Form

$$W = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, u_\alpha\, v_\beta,$$

welche die *bilineare Covariante* des Differentialausdrucks (1.) heisst, verschwinde. Die Invariante s kann auch erklärt werden als die kleinste Anzahl cogredienter linearer Relationen, die zwischen den nämlichen Veränderlichen bestehen müssen, damit ausser der bilinearen Form W noch die linearen Formen

$$U = \Sigma\, a_\alpha\, u_\alpha, \qquad V = \Sigma\, a_\beta\, v_\beta$$

verschwinden. Zugleich ist s die Anzahl der Integrale der Differentialgleichung

$$(7.)\quad a_1\, dx_1 + \dots + a_n\, dx_n = 0,$$

d. h. die kleinste Anzahl vollständiger Differentiale, aus denen der Ausdruck (1.) linear zusammengesetzt werden kann.

Zwischen den beiden Zahlen r und s besteht der Zusammenhang, dass s entweder gleich r oder gleich $r+1$ ist. Mithin ergeben sich nach Gleichung (6.) zwischen den Invarianten p, r, s die folgenden Beziehungen:

Ist $s = r$, so ist $p = 2r = 2s$, also gerade.

Ist $s = r+1$, so ist $p = 2r+1 = 2s-1$, also ungerade.

Ist p gerade, so ist $r = \frac{p}{2}$ und $s = \frac{p}{2}$.

Ist p ungerade, so ist $r = \frac{p-1}{2}$ und $s = \frac{p+1}{2}$.

Nach *A.* §. 7 ist die Klasse p des Differentialausdrucks (1.) gerade oder ungerade, je nachdem sich die Form

$$V = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

aus den Formen

$$V_\alpha = a_{\alpha 1} v_1 + \cdots + a_{\alpha n} v_n \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

linear zusammensetzen lässt oder nicht. Daraus folgt, dass p gerade oder ungerade ist, je nachdem sich die Gleichungen

$$(8.) \qquad a_{\alpha 1} u_1 + \cdots + a_{\alpha n} u_n + a_\alpha u = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

durch einen nicht verschwindenden Werth von u oder allein durch den Werth $u = 0$ befriedigen lassen. Denn multiplicirt man die Gleichungen (8.) oder, da $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$ ist, die Gleichungen

$$a_{1\beta} u_1 + \cdots + a_{n\beta} u_n = a_\beta u \qquad (\beta = 1, \ldots n)$$

der Reihe nach mit $v_1, \ldots v_n$ und addirt sie, so erhält man

$$(8^*.) \qquad V_1 u_1 + \cdots + V_n u_n = V u.$$

Wenn daher den Gleichungen (8.) durch einen von Null verschiedenen Werth von u genügt wird, so lässt sich V aus $V_1, \ldots V_n$ linear zusammensetzen, und p ist gerade; lässt sich umgekehrt V aus $V_1, \ldots V_n$ zusammensetzen, so besteht eine Gleichung von der Form (8*.), in welcher u von Null verschieden ist, und daraus ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten von $v_1, \ldots v_n$ die Gleichungen (8.). Folglich muss, wenn den Gleichungen (8.) nur durch den Werth $u = 0$ genügt werden kann, p ungerade sein. (Vgl. *Christoffel*, dieses Journal Bd. 70, S. 242; *Darboux*, *Liouv.* Journ. 1874, p. 361.)

§. 2.

Wenn man den Differentialausdruck (2.) durch $z_{r+\varrho}$ dividirt, so wird seine Klasse um 1 erniedrigt; wenn man aber den Ausdruck (2*.) mit w multiplicirt, und w eine von $z, z_1 \ldots z_{2r}$ unabhängige Function von $x_1, \ldots x_n$ ist, so wird seine Klasse um 1 erhöht. Wenn man von dem

Ausdruck (2*.) dz subtrahirt, so wird seine Klasse um 1 vermindert; wenn man aber zu dem Ausdruck (2.) dz addirt und z von $z_1, \dots z_{2r}$ unabhängig ist, so wird seine Klasse um 1 vermehrt. Diese Bemerkungen führen zu der Aufgabe, allgemein die Veränderungen zu untersuchen, welche die Klasse eines Differentialausdrucks erfährt, wenn derselbe mit einem Factor multiplicirt oder um ein vollständiges Differential vermehrt wird.

Sei

$$(9.)\qquad w\,\Sigma\, a dx = \Sigma\, a'\, dx,$$

und mögen die Zahlen p', r', s' für diesen Ausdruck dieselbe Bedeutung haben, wie p, r, s für den Ausdruck (1.). Dann ist s' die kleinste Anzahl congredienter linearer Relationen, die zwischen den Veränderlichen $u_1, \dots u_n$; $v_1, \dots v_n$ bestehen müssen, damit die linearen Formen

$$w\,\Sigma\, a_\alpha u_\alpha = w\, U, \qquad w\,\Sigma\, a_\beta v_\beta = w\, V$$

nebst der bilinearen Form

$$w\,\Sigma a_{\alpha\beta}\, u_\alpha v_\beta + \left(\Sigma \frac{\partial w}{\partial x_\beta} v_\beta\right)\left(\Sigma\, a_\alpha u_\alpha\right) - \left(\Sigma \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} u_\alpha\right)\left(\Sigma a_\beta v_\beta\right)$$

$$= w\, W + \left(\Sigma \frac{\partial w}{\partial x_\beta} v_\beta\right) U - \left(\Sigma \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} u_\alpha\right) V$$

verschwinden. Da aber diese Formen genau für die nämlichen Werthe Null sind, wie U, V, W, so ist $s' = s$. Oder:

Die Zahl s ist die kleinste Anzahl vollständiger Differentiale, aus denen der Ausdruck (1.) zusammengesetzt werden kann. Ist aber

$$\Sigma\, a dx = \sum_\sigma^{1,s} g_\sigma\, df_\sigma,$$

so ist

$$\Sigma\, a'\, dx = \sum_\sigma^{1,s} w\, g_\sigma\, df_\sigma.$$

Folglich ist die kleinste Anzahl vollständiger Differentiale, aus denen der Ausdruck (9.) zusammengesetzt werden kann, $s' \leqq s$. Da aber (1.) aus (9.) durch Multiplication mit $\frac{1}{w}$ entsteht, so ist auch $s \leqq s'$ und daher $s' = s$. Folglich ist r' entweder gleich s oder gleich $s-1$.

Ist also $s = r$, so ist r' entweder gleich r oder gleich $r-1$ und desshalb nach (6.) p' entweder gleich p oder gleich $p-1$.

Ist aber $s=r+1$, so ist r' entweder gleich $r+1$ oder r, und daher p entweder gleich $p+1$ oder p.

Sei zweitens z eine Function von $x_1, \dots x_n$ und

$$(9^*.) \qquad \Sigma(adx) + dz = \Sigma a'dx$$

und mögen wieder p', r', s' für diesen Ausdruck dasselbe bedeuten, wie p, r, s für (1.). Dann ist

$$a'_{\alpha\beta} = \frac{\partial a'_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a'_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_\alpha + \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_\beta + \frac{\partial z}{\partial x_\beta}\right) = a_{\alpha\beta}.$$

Da $2r$ der Rang der Determinante (4.) ist, so muss demnach $r'=r$ sein. Folglich ist s' entweder gleich r oder gleich $r+1$.

Ist also $r=s$, so ist s' entweder gleich s oder gleich $s+1$, und daher p' entweder gleich p oder gleich $p+1$.

Ist aber $r=s-1$, so ist s' entweder gleich $s-1$ oder gleich s und daher p' entweder gleich $p-1$ oder gleich p. Es ergeben sich also die Sätze:

I. *Wird ein Differentialausdruck mit einem Factor multiplicirt, so bleibt die Invariante s ungeändert; wird er um ein vollständiges Differential vermehrt, so bleibt die Invariante r ungeändert.*

II. *Bleibt die Klasse eines Differentialausdrucks, wenn er mit einem Factor multiplicirt wird, nicht ungeändert, so wird sie, wenn sie gerade ist, um 1 erniedrigt, wenn sie ungerade ist, um 1 erhöht.*

III. *Bleibt die Klasse eines Differentialausdrucks, wenn er um ein vollständiges Differential vermehrt wird, nicht ungeändert, so wird sie, wenn sie gerade ist, um 1 erhöht, wenn sie ungerade ist, um 1 erniedrigt.*

Da p die kleinste Anzahl unabhängiger Variabeln ist, mittelst deren der Ausdruck (1.) dargestellt werden kann, so kann p nicht grösser als n sein. Mithin ergiebt sich aus den Sätzen II. und III. die Folgerung:

IV. *Ist die Klasse eines Differentialausdrucks der Anzahl der unabhängigen Variabeln gleich, so bleibt sie, falls sie gerade ist, bei Vermehrung desselben um ein vollständiges Differential, falls sie ungerade ist, bei Multiplication desselben mit einem Factor ungeändert.*

§. 3.

Ich nehme jetzt an, dass $a_1, \dots a_n$ homogene Functionen des nämlichen Grades g von $x_1, \dots x_n$ sind. Dann ist

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_n} x_n = g a_\alpha.$$

Setzt man ferner

$$(10.)\qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = a,$$

so ergiebt sich durch Differentiation nach x_α

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_\alpha} x_1 + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_\alpha} x_n + a_\alpha = \frac{\partial a}{\partial x_\alpha}.$$

Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man unter Anwendung der Bezeichnung (3.)

$$(11.)\qquad a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = (g+1) a_\alpha - \frac{\partial a}{\partial x_\alpha}. \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

Sei nun zunächst $a = 1$ (oder eine von Null verschiedene Constante). Da a eine homogene Function $(g+1)$ten Grades ist, so muss in diesem Falle $g+1 = 0$ sein. Die Gleichungen (10.) und (11.)

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1,$$
$$a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

zeigen, dass die linearen Formen V_α für $v_1 = x_1, \dots v_n = x_n$ verschwinden, während V für dieses Werthsystem nicht verschwindet. Daher lässt sich V nicht aus den Formen $V_1, \dots V_n$ linear zusammensetzen, und folglich ist die Klasse p des Differentialausdrucks (1.) ungerade.

I. *Ist* $a = 1$, *also* $g = -1$, *so ist* p *ungerade.*

Ist aber $a = 0$ und g nicht gleich -1, so zeigen die Gleichungen (11.)

$$a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = (g+1) a_\alpha,$$

dass den linearen Gleichungen (8.) durch einen von Null verschiedenen Werth $u = g+1$ Genüge geschieht. Daher ist p gerade.

II. *Ist* $a = 0$ *und* g *nicht gleich* -1, *so ist* p *gerade.*

Sei p gerade und a von Null verschieden, dann erfüllt der Ausdruck

$$\frac{1}{a}(a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n)$$

die Voraussetzung des Satzes I. Daher ist seine Klasse ungerade, also, da p gerade ist, nicht gleich p. Nach §. 3, II. ist sie folglich $p-1$.

III. *Die Klasse des Differentialausdrucks $a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n$, dessen Coefficienten homogene Functionen gleichen Grades sind, wird, wenn sie gerade ist, und wenn $a = a_1\,x_1 + \cdots + a_n\,x_n$ von Null verschieden ist, um* 1 *erniedrigt, indem derselbe durch a dividirt wird.*

Sei p ungerade und g nicht gleich -1, dann kann man eine homogene Function $(g+1)$ten Grades z so bestimmen, dass der (homogene) Differentialausdruck

$$a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n - dz$$

die Voraussetzungen des Satzes II. erfüllt. Zu dem Ende muss

$$\left(a_1 - \frac{\partial z}{\partial x_1}\right)x_1 + \cdots + \left(a_n - \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)x_n = 0$$

oder

$$a = a_1\,x_1 + \cdots + a_n\,x_n = \frac{\partial z}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}x_n = (g+1)\,z$$

sein. Dann ist die Klasse des neuen Differentialausdrucks gerade, also, da p ungerade ist, von p verschieden. Nach §. 2, III. ist sie daher gleich $p-1$.

IV. *Die Klasse des Differentialausdrucks $a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n$, dessen Coefficienten homogene Functionen $g$ten Grades sind, wird, wenn sie ungerade ist, und wenn g nicht gleich* -1 *ist, um* 1 *erniedrigt, indem von demselben*

$$d\,\frac{a_1\,x_1 + \cdots + a_n\,x_n}{g+1}$$

subtrahirt wird.

Unter den in den Sätzen III. und IV. gemachten Annahmen kann man also die Klasse des Differentialausdrucks (1.) um 1 reduciren. Die Annahmen sind aber der Art, dass die beiden Reductionen nicht nach einander ausgeführt werden können.

Für $p=1$ ergiebt sich aus Satz IV. die auch unmittelbar aus dem *Euler*schen Satze über die homogenen Functionen ersichtliche Folgerung:

V. *Ist der Differentialausdruck* (1.) *ein vollständiges Differential und ist* g *nicht gleich* -1, *so ist*

$$\int (a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n) = \frac{1}{g+1}(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n).$$

Daraus fliesst als Corollar der Satz:

VI. *Ist* $a = 0$, *während* $a_1, \dots a_n$ *nicht alle verschwinden, so kann der Differentialausdruck* (1.) *nur dann ein vollständiges Differential sein, wenn* $g = -1$ *ist.*

Für $p = 2$ ergiebt sich aus dem Satze III. die Folgerung:

VII. *Wird die Differentialgleichung* $a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n = 0$ *durch eine einzige endliche Gleichung befriedigt, so ist dieselbe*

$$\int \frac{a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n}{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n} = k,$$

vorausgesetzt, dass $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ *von Null verschieden ist.*

Die Klasse p des Differentialausdrucks (1.) kann nicht grösser als n sein. Damit $p = n$ sei, ist erforderlich und hinreichend, dass bei geradem n die Determinante (4.) bei ungeradem n die Determinante (5.) von Null verschieden sei. Ist $a = 0$, so folgt aus den Gleichungen (10.) und (11.)

$$a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = (g+1)\, a_\alpha, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

$$a_1\ x_1 + \cdots + a_n\, x_n = 0,$$

dass die Determinante (5.) verschwindet.

VIII. *Ist* $a = 0$ *und* n *ungerade, so ist* $p < n$.

Ist nicht nur $a = 0$, sondern auch $g = -1$, so folgt aus den Gleichungen (11.)

$$a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = 0, \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

dass die Determinante (4.) verschwindet.

IX. *Ist* $a = 0$ *und* $g = -1$, *so ist* $p < n$.

Die beiden Sätze VIII. und IX. können auch leicht aus der Identität

$$a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n = a\frac{dx_1}{x_1} + x_1\, a_2\, d\frac{x_2}{x_1} + \cdots + x_1\, a_n\, d\,\frac{x_n}{x_1}$$

geschlossen werden.

Sei $a = 0$, g nicht gleich -1 und $p = n$, also nach Satz II. n gerade. Ist dann w irgend eine homogene Function $(g+1)$ten Grades, so erfüllt der Ausdruck

$$\frac{1}{w}(a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n)$$

die Voraussetzungen des Satzes IX. Seine Klasse ist daher kleiner als n, also nach §. 2, II gleich $n-1$.

X. *Ist $a = 0$, g nicht gleich -1, und $p = n$, so wird die Klasse des Differentialausdrucks* (1.) *um* 1 *erniedrigt, indem derselbe durch eine beliebige homogene Function $(g+1)$ten Grades dividirt wird.*

§. 4.

Die in §. 3 entwickelten Sätze will ich jetzt in einigen Beispielen dazu benutzen, den Ausdruck (1.) auf die reducirte Form (2.) oder (2.*) zu bringen. Sind $a_1, \dots a_n$ ganze homogene lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$,

$$a_\alpha = c_{1\alpha} x_1 + c_{2\alpha} x_2 + \cdots + c_{n\alpha} x_n, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

so gelingt dies in vielen Fällen durch eine lineare Substitution.

1) Sei $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$, also (§. 3, II.) p gerade $(= 2r)$. Dann ist $a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n$ eine alternirende bilineare Form von $x_1, \dots x_n$; $y_1, \dots y_n$, deren Determinante den Rang $2r$ hat. Daher lässt sie sich (*A.* §. 9.) auf die Form

$$a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = \sum_{\varrho}^{r} {}_1 X_\varrho Y_{r+\varrho} - X_{r+\varrho} Y_\varrho$$

reduciren, wo die Grössen X_μ $(\mu = 1, \dots 2r)$ unabhängige homogene lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$ und die Grössen Y_μ die nämlichen Functionen von $y_1, \dots y_n$ bedeuten. Ersetzt man daher y_α durch dx_α, so erhält man

$$\Sigma a dx = \sum_{\varrho}^{r} {}_1 X_\varrho dX_{r+\varrho} - X_{r+\varrho} dX_\varrho = \sum_{\varrho}^{r} {}_1 X_\varrho^2 \, d\frac{X_{r+\varrho}}{X_\varrho}.$$

(Vgl. *Euler,* Inst. calc. int. vol. III, 13).

2) Sei p ungerade $(= 2r+1)$. Dann erfüllt (§. 3, IV.) der Ausdruck

$$a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n - \tfrac{1}{2} da$$

die Voraussetzungen der vorigen Nummer, und daher ist

$$a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n = \tfrac{1}{2} da + \sum_{\varrho} X_\varrho^2 \, d \frac{X_{r+\varrho}}{X_\varrho}.$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommenden $2r+1$ Functionen sind unter einander unabhängig, weil sich der Ausdruck (1.) nicht durch weniger als $p=2r+1$ unabhängige Variable darstellen lässt. Die Gleichung enthält die bekannte Zerlegung einer bilinearen Form in eine symmetrische und eine alternirende.

3) Sei p gerade $(=2r)$ und kleiner als n. Dann ist der Rang der Determinante (4.) gleich $2r$. Die Bezeichnung der Variabeln sei so gewählt, dass in den $2r$ ersten Zeilen von (4.) eine Unterdeterminante $2r$ten Grades von Null verschieden ist. Dann kann (*A.* §. 27) die Reduction des Differentialausdrucks (1.) mit der Integration des Systems von Differentialgleichungen

$$a_{\alpha 1}\, dx_1 + \cdots + a_{\alpha n} dx_n = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

begonnen werden, in welchem nur die $2r$ ersten Gleichungen unabhängig sind. Da die Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ constant sind, so sind

$$a_{\mu 1}\, x_1 + \cdots + a_{\mu n} x_n = k_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots 2r)$$

$2r$ unabhängige Integrale desselben. Wenn man daher die Grössen

$$y_\mu = a_{\mu 1}\, x_1 + \cdots + a_{\mu n}\, x_n \quad (\mu = 1, \ldots 2r)$$

als neue Variable einführt, so geht der Differentialausdruck (1.) nach *A.* §. 27 in einen andern über, der nur die Variabeln $y_1, \ldots y_{2r}$ enthält, und dessen Invariante $p = 2r$ ist. (Vgl. *Kronecker,* Monatsberichte der Berliner Akademie 1874, S. 402.)

4) Sei $p=2r=n$. Dann ist die Determinante (4.) von Null verschieden. Ist also

$$a_1\, y_1 + \cdots + a_n y_n = \Sigma\, c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta,$$

so ist die Determinante $|uc_{\alpha\beta} + vc_{\beta\alpha}|$ nicht identisch Null, weil sie für $u=1$, $v=-1$ nicht verschwindet. Wir beschränken uns auf den Fall, dass die Elementartheiler dieser Determinante alle linear sind, dass also ein $k$facher Lineartheiler derselben zugleich ein $(k-1)$facher Lineartheiler aller Unterdeterminanten $(n-1)$ten Grades ist. Dann ist (*Kronecker,* Monatsberichte, 1874, S. 440; d. J. Bd. 68, S. 275.)

$$\Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \sum_\varrho^{1, r} \lambda_\varrho X_\varrho Y_{r+\varrho} + \lambda_{r+\varrho} X_{r+\varrho} Y_\varrho,$$

wo

$$|u c_{\alpha\beta} + v c_{\beta\alpha}| = \prod_\varrho^{1, r} (u\lambda_\varrho + v\lambda_{r+\varrho})(u\lambda_{r+\varrho} + v\lambda_\varrho)$$

die in ihre Elementartheiler zerlegte Determinante ist, die Grössen X_α ($\alpha = 1, \dots n$) lineare Functionen von $x_1, \cdots x_n$ und die Grössen Y_α die nämlichen Functionen von $y_1, \dots y_n$ bedeuten. Daher ist

$$\Sigma a dx = \sum_\varrho^{1, r} \lambda_\varrho X_\varrho dX_{r+\varrho} + \lambda_{r+\varrho} X_{r+\varrho} dX_\varrho = \sum_\varrho^{1, r} X_\varrho^{1-\lambda_{r+\varrho}} X_{r+\varrho}^{1-\lambda_\varrho} d\left(X_\varrho^{\lambda_{r+\varrho}} X_{r+\varrho}^{\lambda_\varrho}\right).$$

§. 5.

Als zweites Beispiel behandle ich die Differentialgleichung

$$(12.) \quad a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = 0,$$

deren Coefficienten ganze homogene Functionen zweiten Grades sind. Da die Anzahl der unabhängigen Variabeln 3 ist, so kann p nur 1, 2 oder 3 sein. Ist $p = 1$, so ergiebt sich das Integral aus §. 3, V., ist $p = 2$ und a nicht Null, aus §. 3, VII. Auf den somit noch zu erledigenden Fall $p = 2$, $a = 0$ lässt sich auch der Fall $p = 3$ nach §. 3, IV. zurückführen.

Sei also

$$(13.) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Dann ist (§. 3, II, VIII) p gerade, also gleich 2. Mithin ist die Integrabilitätsbedingung

$$(14.) \quad a_1 a_{23} + a_2 a_{31} + a_3 a_{12} = 0$$

eine Folge der Gleichung (13.). Sei h eine beliebige Constante und

$$A_1 = \tfrac{1}{3} a_{23} + hx_1, \qquad A_2 = \tfrac{1}{3} a_{31} + hx_2, \qquad A_3 = \tfrac{1}{3} a_{12} + hx_3.$$

Dann ist nach Gleichung (11.)

$$3a_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 3(x_2 A_3 - x_3 A_2),$$

also

$$(15.) \quad a_1 = x_2 A_3 - x_3 A_2, \qquad a_2 = x_3 A_1 - x_1 A_3, \qquad a_3 = x_1 A_2 - x_2 A_1,$$

wo die Grössen

$$A_\alpha = c_{1\alpha} x_1 + c_{2\alpha} x_2 + c_{3\alpha} x_3 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

lineare homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 sind. Sind umgekehrt A_1, A_2, A_3 gegebene lineare Formen, so genügen die durch die Gleichungen (15.)

bestimmten homogenen Functionen zweiten Grades a_1, a_2, a_3 der Gleichung (13.), also auch der Gleichung (14.), und folglich ist die Differentialgleichung (12.) oder

$$(12^*.) \quad \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0$$

durch eine einzige endliche Gleichung integrabel, oder sie bildet für sich ein *vollständiges System.* (*A.* §. 13.) Mithin bilden auch die ihr *adjungirten* partiellen Differentialgleichungen

$$(16.) \quad \begin{cases} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \\ A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

ein vollständiges System, haben also eine gemeinsame Lösung f, und man erhält das Integral der totalen Differentialgleichung (12.), indem man f gleich einer willkürlichen Constanten k setzt. Die erste partielle Differentialgleichung (16.) sagt aus, dass f eine homogene Function nullten Grades ist. Die allgemeine Lösung der zweiten ist eine von t unabhängige Function von x_1, x_2, x_3, welche vermöge der Integralgleichungen des Systems linearer Differentialgleichungen

$$(17.) \quad \frac{dx_\alpha}{dt} = A_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

einer willkürlichen Constanten gleich wird. (Vgl. *Allégret, Comptes rendus tome* 83, p. 1171.) Allgemeiner gilt der Satz:

Sind A_1, A_2, A_3 homogene Functionen gleichen Grades von x_1, x_2, x_3, so giebt es eine von t unabhängige homogene Function nullten Grades $f(x_1, x_2, x_3)$, welche vermöge der Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen (17.) *einer willkürlichen Constanten gleich wird. Die Gleichung $f = k$ ist zugleich das Integral der totalen Differentialgleichung* (12*.)

Bei der Integration der Differentialgleichungen (17.) beschränken wir uns auf den Fall, wo die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

alle von einander verschieden sind.

Sei

$$F(\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & c_{11}-\lambda & c_{12} & c_{13} \\ \xi_2 & c_{21} & c_{22}-\lambda & c_{23} \\ \xi_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

wo ξ_1, ξ_2, ξ_3 und λ constante Parameter sind. Vermöge der Integralgleichungen des Systems (17.) ist $F(\lambda)$ eine Function von t. Ihre Ableitung (nach t) bildet man, indem man in der ersten Zeile x_α durch $\frac{dx_\alpha}{dt} = c_{1\alpha}x_1 + c_{2\alpha}x_2 + c_{3\alpha}x_3$ ersetzt. Nach leichten Reductionen erhält man

$$\frac{dF(\lambda)}{dt} = \lambda F(\lambda) + (x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)\varphi(\lambda)$$

und daher

$$\frac{dF(\lambda_\alpha)}{dt} = \lambda_\alpha F(\lambda_\alpha),$$

$$F(\lambda_\alpha) = k_\alpha e^{\lambda_\alpha t}. \quad (\alpha = 1, 2, 3.)$$

Sind μ_1, μ_2, μ_3 Constanten, so ist

$$F(\lambda_1)^{\mu_1} F(\lambda_2)^{\mu_2} F(\lambda_3)^{\mu_3} = ke^{(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)t}$$

ein allgemeineres Integral des Systems (17.). Damit dasselbe von t unabhängig sei, muss

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 0$$

sein, und damit die linke Seite eine homogene Function nullten Grades sei, muss

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$

sein. Beiden Gleichungen genügen die Werthe

$$\mu_1 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \mu_2 = \lambda_3 - \lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Folglich ist

$$(18.) \qquad F(\lambda_1)^{\lambda_2-\lambda_3} F(\lambda_2)^{\lambda_3-\lambda_1} F(\lambda_3)^{\lambda_1-\lambda_2} = k$$

das Integral der totalen Differentialgleichung (13.). (Vgl. *Jacobi,* dieses Journ. Bd. 24, S. 1.)

§. 6.

Zum Schluss behandle ich noch eine Verallgemeinerung der *Jacobischen* Differentialgleichung, zu der die folgenden Betrachtungen führen.

Sind zwei bilineare Formen von n Variabelnpaaren

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha \xi_\beta, \qquad B = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha \xi_\beta$$

gegeben, so nenne ich die bilineare Form

$$\Sigma \frac{\partial A}{\partial \xi_x} \frac{\partial B}{\partial x_x} = \sum_{\alpha,\beta} (\sum_x a_{\alpha x} b_{x\beta}) x_\alpha \xi_\beta$$

aus A und B zusammengesetzt und bezeichne sie mit (AB). (Vgl. meine Abhandlung: *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen,* d. J. Bd. 84, S. 1.). Sei nun

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} = A_\alpha, \qquad \frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha} = B_\alpha$$

und sei

$$A(f) = \Sigma A_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad B(f) = \Sigma B_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha},$$

wo jetzt die Zeichen A und B Operationssymbole sind, oder wo der homogene lineare partielle Differentialausdruck $A(f)$ aus der bilinearen Form A entsteht, indem die Variabeln ξ_α durch die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ ersetzt werden. Dann ist

$$A(B_\beta) - B(A_\beta) = \sum_\alpha A_\alpha \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - B_\alpha \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha},$$

$$\sum_\beta (A(B_\beta) - B(A_\beta)) \xi_\beta = \Sigma \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial B}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} = (AB) - (BA).$$

Sind nun die Formen A und B *vertauschbar,* d. h. ist $(AB) = (BA)$, so ist folglich

$$A(B_\beta) - B(A_\beta) = 0$$

$$\sum_\beta (A(B_\beta) - B(A_\beta)) \frac{\partial f}{\partial x_\beta} = A(B(f)) - B(A(f)) = 0.$$

Sind also $A, B, C, \ldots$ mehrere Formen, von denen je zwei vertauschbar sind, so bilden die partiellen Differentialgleichungen

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0, \quad C(f) = 0, \ldots$$

ein *Jacobi*sches System. (*Clebsch,* d. J. Bd. 65, S. 259.)

Sei $A^{(r)}$ die bilineare Form, die man erhält, indem man A mit sich selbst r Mal zusammensetzt, und sei

$$A^{(0)} = x_1 \xi_1 + \cdots + x_n \xi_n = E.$$

Dann sind die Formen $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... paarweise mit einander vertauschbar. (d. J. Bd. 84, S. 10.) Setzt man also

$$A_\alpha^{(r)} = \frac{\partial A^{(r)}}{\partial \xi_\alpha},$$

so bilden die Differentialgleichungen

$$A_1^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (r = 0, 1, 2 \ldots)$$

ein *Jacobi*sches System. Ist

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \ldots & a_{1n} \\ . & \ldots & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

so beschränke ich mich der Einfachheit halber auf den Fall, wo die n Wurzeln $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ alle von einander verschieden sind. Dann sind, wie ich unten zeigen werde,

$$A_1^{(r)} \xi_1 + \cdots + A_n^{(r)} \xi_n \quad (r = 0, 1, \ldots n-1)$$

n unabhängige Linearformen von $\xi_1, \ldots \xi_n$.

Wenn aber die $n-1$ unabhängigen partiellen Differentialgleichungen

$$A_1^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots n-2)$$

ein vollständiges System bilden, so ist (*A.* §. 13) die ihnen *adjungirte* totale Differentialgleichung

$$(19.) \quad \begin{vmatrix} dx_1 & \ldots & dx_n \\ A_1^{(0)} & \ldots & A_n^{(0)} \\ . & \ldots & . \\ A_1^{(n-2)} & \ldots & A_n^{(n-2)} \end{vmatrix} = 0$$

durch eine einzige endliche Gleichung zu integriren.

Das Integral dieser Differentialgleichung, einer Verallgemeinerung der *Jacobi*schen, findet man auf folgendem Wege.

Ist

$$F(\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & a_{11}-\lambda & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ \xi_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

die *adjungirte* Form von $A - \lambda E$, so ist die aus diesen beiden zusammengesetzte Form

$$\big((A-\lambda E)\,F(\lambda)\big) = \varphi(\lambda)\,E,$$

oder es ist

$$\big(A\,F(\lambda)\big) = \lambda\,F(\lambda) + \varphi(\lambda)\,E$$

und folglich

$$\big(A F(\lambda_\alpha)\big) = \lambda_\alpha\,F(\lambda_\alpha).$$

Setzt man beide Seiten dieser Gleichung mit A zusammen, so erhält man

$$\big(A^2\,F(\lambda_\alpha)\big) = \lambda_\alpha\big(A\,F(\lambda_\alpha)\big) = \lambda_\alpha^2\,F(\lambda_\alpha),$$

und durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens findet man

$$\big(A^{(r)}\,F(\lambda_\alpha)\big) = \lambda_\alpha^r\,F(\lambda_\alpha),$$

oder

$$\Sigma\,\frac{\partial A^{(r)}}{\partial \xi_x}\,\frac{\partial F(\lambda_\alpha)}{\partial x_x} = \lambda_\alpha^r\,F(\lambda_\alpha).$$

Durch Multiplication der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} dx_1 & \dots & dx_n \\ A_1^{(0)} & \dots & A_n^{(0)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_1^{(n-2)} & \dots & A_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F(\lambda_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(\lambda_1)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F(\lambda_2)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(\lambda_2)}{\partial x_n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial F(\lambda_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(\lambda_n)}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

deren zweite eine Constante ist, ergiebt sich daher aus der Differentialgleichung (19.)

$$\begin{vmatrix} d\,F(\lambda_1) & \dots & d\,F(\lambda_n) \\ F(\lambda_1) & \dots & F(\lambda_n) \\ \lambda_1 F(\lambda_1) & \dots & \lambda_n F(\lambda_n) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_1^{n-2}\,F(\lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}\,F(\lambda_n) \end{vmatrix} = 0$$

oder bis auf einen constanten Factor

$$F(\lambda_1)\dots F(\lambda_n)\left[\frac{1}{\varphi'(\lambda_1)}\,\frac{dF(\lambda_1)}{F(\lambda_1)} + \dots + \frac{1}{\varphi'(\lambda_n)}\,\frac{dF(\lambda_n)}{F(\lambda_n)}\right] = 0.$$

Folglich ist

$$(20.)\qquad F(\lambda_1)^{\frac{1}{\varphi'(\lambda_1)}} \dots F(\lambda_n)^{\frac{1}{\varphi'(\lambda_n)}} = k$$

das Integral der Differentialgleichung (19.) und das Product $F(\lambda_1)\dots F(\lambda_n)$ ihr integrirender Divisor. Derselbe ist (Vgl. *Hermite*, d. J. Bd. 47 S. 314, *Hesse*, d. J. Bd. 57, S. 175.) bis auf einen constanten Factor gleich

$$(21.)\quad M = \begin{vmatrix} A_1^{(0)} & \dots & A_n^{(0)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_1^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

wie sich aus der Formel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial A^{(0)}}{\partial \xi_n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial A^{(n-1)}}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial A^{(n-1)}}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial F(\lambda_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(\lambda_1)}{\partial x_n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial F(\lambda_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(\lambda_n)}{\partial x_n} \end{vmatrix} = F(\lambda_1)\dots F(\lambda_n) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ergiebt. Aus derselben folgt auch die Unabhängigkeit der Linearformen

$$A_1^{(\nu)}\xi_1 + \dots + A_n^{(\nu)}\xi_n \quad (\nu = 0, 1, \dots n-1),$$

so lange die ersten Unterdeterminanten von $\varphi(\lambda)$ keinen Divisor gemeinsam haben.

Durch Multiplication der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial A^{(0)}}{\partial \xi_n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial A^{(n-1)}}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial A^{(n-1)}}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial A^{(0)}}{\partial x_n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial A^{(n-1)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial A^{(n-1)}}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

deren erste gleich M und deren zweite eine Constante ist, zeigt sich endlich, dass der integrirende Divisor der Determinante

$$\begin{vmatrix} A^{(0)} & A^{(1)} & \dots & A^{(n-1)} \\ A^{(1)} & A^{(2)} & \dots & A^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A^{(n-1)} & A^{(n)} & \dots & A^{(2n-2)} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} F(\lambda_1)\dots F(\lambda_n)$$

gleich ist.

Dass der Ausdruck (21.) den integrirenden Divisor der Differentialgleichung (19.) darstellt, ist ein specieller Fall des folgenden Satzes, in welchem $A_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots n)$ irgend n^2 Functionen von $x_1, \dots x_n$ bedeuten:

Wenn je zwei der n unabhängigen Differentialausdrücke

$$A_\alpha(f) = A_{\alpha 1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_{\alpha n}\frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

der Bedingung

$$A_\alpha(A_\beta(f)) = A_\beta(A_\alpha(f))$$

genügen, so ist

$$(22.)\quad \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n-1,1} & \dots & A_{n-1,n} \\ dx_1 & \dots & dx_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

ein vollständiges Differential.

Dieser Satz lässt sich, wenn man die Lehre von der Integration eines vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen nicht benutzen will, folgendermassen beweisen: Da die n Differentialausdrücke $A_\alpha(f)$ unabhängig sind, so ist die Determinante $n$ten Grades $|A_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden. Folglich kann man n Grössen $a_1, \dots a_n$ finden, welche den n Gleichungen

$$A_{\alpha 1}a_1 + \cdots + A_{\alpha n}a_n = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots n-1)$$
$$A_{n1}a_1 + \cdots + A_{nn}a_n = 1$$

genügen. Dann wird behauptet, dass der Ausdruck

$$a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$$

ein vollständiges Differential ist, falls die Relationen

$$\sum_\varkappa A_{\alpha\varkappa}\frac{\partial A_{\beta\lambda}}{\partial x_\varkappa} - A_{\beta\varkappa}\frac{\partial A_{\alpha\lambda}}{\partial x_\varkappa} = 0 \quad (\alpha, \beta, \lambda = 1, \dots n)$$

bestehen. Differentiirt man die Gleichung

$$\sum_\lambda A_{\beta\lambda}a_\lambda = \text{const.} \quad (\beta = 1, \dots n)$$

nach $x_\varkappa$, so ergiebt sich

$$-\sum_\lambda A_{\beta\lambda}\frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\varkappa} = \sum_\lambda a_\lambda \frac{\partial A_{\beta\lambda}}{\partial x_\varkappa}.$$

Multiplicirt man mit $A_{\alpha\varkappa}$ und summirt nach $\varkappa$, so findet man

$$-\sum_{\varkappa,\lambda} A_{\alpha\varkappa} A_{\beta\lambda} \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\varkappa} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_\lambda A_{\alpha\varkappa} \frac{\partial A_{\beta\lambda}}{\partial x_\varkappa}.$$

Vertauscht man α mit β und zieht die neue Gleichung von der ursprünglichen ab, so erhält man

$$-\sum_{\varkappa,\lambda} (A_{\alpha\varkappa} A_{\beta\lambda} - A_{\alpha\lambda} A_{\beta\varkappa}) \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\varkappa} = \sum_{\lambda} \left(a_\lambda \sum_{\varkappa} \left(A_{\alpha\varkappa} \frac{\partial A_{\beta\lambda}}{\partial x_\varkappa} - A_{\beta\varkappa} \frac{\partial A_{\alpha\lambda}}{\partial x_\varkappa}\right)\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist Null. Die linke lässt sich, wenn man nur über die Paare der Zahlen $\varkappa, \lambda$ von 1 bis n summirt, für welche $\varkappa > \lambda$ ist, auf die Gestalt

$$\sum_{\varkappa,\lambda} (A_{\alpha\varkappa} A_{\beta\lambda} - A_{\alpha\lambda} A_{\beta\varkappa}) \left(\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\varkappa}\right) = 0$$

bringen. Die Determinante dieser $\frac{n(n-1)}{2}$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen $\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\varkappa}$ ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante $n$ten Grades $|A_{\alpha\beta}|$, also von Null verschieden. Daher ist $\frac{\partial a_\varkappa}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\varkappa}$, also ist der Ausdruck (22.) ein vollständiges Differential.

Zürich, im Juni 1877.

Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen.

(Von Herrn *L. Stickelberger* in Zürich.)

Die allgemeine Formel, welche *Jacobi* (dieses Journal, Bd. 53, S. 265) für die Umwandlung einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten gegeben hat, beruht auf der Voraussetzung, dass in der Determinante der Form eine Reihe von Unterdeterminanten von Null verschieden ist. Bekanntlich ist es aber stets auf vielerlei Weise möglich, eine gegebene Form durch eine lineare Transformation in eine solche umzuwandeln, deren Coefficientensystem jene Voraussetzung befriedigt. Indem man diese vorläufige Umgestaltung mit der *Jacobi*schen Transformation vereinigt, gelangt man zu der eleganten Darstellung einer quadratischen Form durch eine Quadratsumme, welche Herr *Darboux* (*Liouv.* Journ. 1874, p. 354) seinen Untersuchungen über diese Formen zu Grunde gelegt hat. Indessen scheint uns der Nachweis, den er dafür gibt, dass die erwähnte Schwierigkeit in der Anwendung der *Jacobi*schen Methode durch seine Verallgemeinerung derselben wirklich gehoben wird, nicht vollkommen stichhaltig zu sein. Er schliesst dies aus dem Satze (S. 356), dass die Function

$$\Phi_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & X_1^1 & \cdots & X_1^p \\ \vdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & X_n^1 & \cdots & X_n^p \\ X_1^1 & \cdots & X_n^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_1^p & \cdots & X_n^p & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

der np Variabeln X_α^ν, in welcher $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ ist, nur dann identisch verschwinden kann, wenn in dem System der Grössen $a_{\alpha\beta}$ alle $p$ten Unter-

determinanten gleich Null sind. Sein Beweis dieses Satzes beruht auf einer mehrmaligen Anwendung der Bemerkung, dass aus dem identischen Verschwinden des Ausdruckes $\Sigma s_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ auch das des Ausdruckes $\Sigma s_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ folgt, vorausgesetzt dass $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ ist. Letztere Voraussetzung ist jedoch nur bei der ersten, nicht aber bei den folgenden Anwendungen dieser Bemerkung erfüllt*).

Eine ähnliche Schwierigkeit bietet sich bei der Anwendung dar, welche Herr *Weierstrass* von der *Jacobi*schen Formel auf die Reduction von Schaaren quadratischer Formen gemacht hat. Hier genügt es nicht, dass die Unterdeterminanten, welche die Nenner der einzelnen Quadrate bilden, nicht identisch verschwinden, sondern es darf auch keine derselben mit der ganzen Determinante einen Divisor gemeinsam haben, der nicht auch alle andern Unterdeterminanten des nämlichen Grades theilt (Berl. Monatsber. 1868, S. 317). Herr *Weierstrass* hat eine Substitution angegeben, durch welche man dies stets erreichen kann. Herr *Darboux* hat die *Weierstrass*sche Darstellung formal vervollkommnet, indem er diese Substitution in die *Jacobi*sche Formel hineingezogen hat. Indessen ist die grössere Anschaulichkeit, welche dadurch erreicht wird, weder von ihm noch von Herrn *Gundelfinger* (welcher die *Darboux*sche Darstellung in die dritte Auflage der analytischen Geometrie von *Hesse* aufgenommen hat), dazu benutzt worden, einen strengen Beweis für die Möglichkeit zu führen, dass man die Bedingungen für die Anwendbarkeit der *Darboux*schen Formel immer durch passende Wahl der in sie eingehenden willkürlichen Constanten erfüllen kann.

---

*) Der Beweis des obigen Satzes kann folgendermassen geführt werden. Ist der Rang (vgl. S. 1. dieses Bandes) der symmetrischen Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ gleich $n-m$, so können die Hauptunterdeterminanten $(n-m)$ten Grades nicht alle gleich Null sein (*Frobenius*, dieses Journal Bd. 82, S. 242, III). Da man nun den Variabeln X_α^ν solche Werthe beilegen kann, dass Φ_m sich auf eine beliebige Hauptunterdeterminante $(n-m)$ten Grades reducirt, so kann diese Function nicht identisch verschwinden. Aus der Voraussetzung, dass Φ_p identisch Null ist, folgt aber leicht, dass $\Phi_{p-1}, \Phi_{p-2}, \dots \Phi_0$ ebenfalls Null sind (Vgl. z. B. *Gundelfinger* in *Hesse*, anal. G. d. R., 3. Aufl. S. 453; vgl. auch §. 1, S. 25). Folglich ist $m > p$ und $n-m < n-p$; gemäss der Definition von m verschwinden also alle Unterdeterminanten $(n-p)$ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$.

Bei Gelegenheit einer Anwendung der Analyse des Herrn *Weierstrass* (De problemate quodam ad duarum formarum bilinearium vel quadraticarum transformationem pertinente, diss. inaug., Berol. 1874) haben wir uns durch ein indirectes Verfahren davon überzeugt, dass sich die oben erwähnte Schwierigkeit wirklich in allen Fällen durch die von ihm angegebene Substitution heben lasse, und es ist uns trotz wiederholter Bemühungen nicht gelungen, dieses Verfahren durch ein directes zu ersetzen, etwa durch Aufstellung einer identischen Determinantenrelation, aus welcher ohne Weiteres ersichtlich wäre, wie man die in §. 1 mit w_ν bezeichnete Grösse zu wählen hat, damit sie mit w keinen grössern Divisor gemein hat als alle νten Unterdeterminanten von w. Indessen ergibt sich aus unserer indirecten Methode eine Reihe von Folgerungen, die wir für einige weitere Untersuchungen nicht entbehren können. Wir entwickeln daher im Folgenden zunächst die Reductionsmethode, die Herr *Weierstrass* für Schaaren von bilinearen oder quadratischen Formen gelehrt hat, in einer Gestalt, in welcher die der *Darboux*schen Deduction anhaftende Schwierigkeit zunächst nicht eigentlich gehoben, sondern nur umgangen wird, und leiten aus der Betrachtung der reducirten Form Regeln ab, nach welchen man die Grössen w_ν stets der oben erwähnten Bedingung gemäss wählen kann.

Ich citire im folgenden die Abhandlung des Herrn *Weierstrass* (Berliner Monatsberichte 1868, S. 310) mit *Ws.*

§. 1.

Die Reduction von Schaaren bilinearer Formen.

Sind

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \text{ und } B = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

zwei bilineare Formen, welche sich nicht bloss durch einen constanten Factor von einander unterscheiden, so nennen wir die Gesammtheit der bilinearen Formen von der Gestalt $pA + qB$ oder, wenn $-\frac{p}{q} = r$ gesetzt wird, von der Gestalt $-q(rA - B)$ eine S c h a a r von Formen (*Kronecker*, Berl. Monatsber. 1868, S. 340) und A, B selber die G r u n d f o r m e n der

Schaar. Sind A' und B' irgend zwei nicht nur um einen constanten Factor verschiedene Formen der Schaar, so stellt auch der Ausdruck $p'A'+q'B'$ alle Formen der Schaar und jede nur einmal dar, und es können daher auch A' und B' als Grundformen der Schaar angenommen werden. Wir betrachten im Folgenden nur solche Schaaren, deren Determinante, d. i. die Determinante der n^2 Grössen $pa_{\alpha\beta}+qb_{\alpha\beta}$, nicht identisch verschwindet, und denken uns, was unter dieser Voraussetzung stets möglich ist, die Grundformen so gewählt, dass die Determinante von A nicht gleich Null ist.

Wir setzen

$$C = rA - B, \quad c_{\alpha\beta} = ra_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta},$$

ferner

$$W_{\nu-1} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & v_1^{(1)} & \dots & v_1^{(\nu-1)} & v_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & v_n^{(1)} & \dots & v_n^{(\nu-1)} & v_n \\ u_1^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\nu-1)} & \dots & u_n^{(\nu-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & \dots & u_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Den Werth, welchen $W_{\nu-1}$ annimmt, 1) wenn man $u_\alpha = u_\alpha^{(\nu)}$ $(\alpha = 1, \dots n)$ setzt, bezeichnen wir mit V_ν, 2) wenn man $v_\alpha = v_\alpha^{(\nu)}$ setzt, mit U_ν, 3) wenn man $u_\alpha = u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha = v_\alpha^{(\nu)}$ setzt, mit w_ν. Es ist also $W_{\nu-1}$ eine bilineare Form der $2n$ Variabeln u_α, v_α; U_ν eine lineare Form der Variabeln u_α; V_ν eine lineare Form der Variabeln v_α. Zwischen diesen Formen besteht die Beziehung

$$(1.) \qquad W_\nu w_{\nu-1} = W_{\nu-1} w_\nu - U_\nu V_\nu.$$

Die $2n^2$ Grössen $u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu)}$ $(\alpha = 1, .. n;\ \nu = 1, .. n)$, welche in die soeben definirten Ausdrücke eingehen, bedeuten Constanten, welche den folgenden Beschränkungen gemäss gewählt werden sollen.

Sei $r-c$ ein λ-facher Lineartheiler der Determinante w $(= w_0)$ und ein λ_1-facher Lineartheiler ihrer sämmtlichen ersten Unterdeterminanten; dann

ist in der Entwickelung von $W\,(= W_0)$ nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ der Coefficient H des Anfangsgliedes $H\,(r-c)^{\lambda_1}$ eine bilineare Form der $2n$ Variabeln u_α, v_α, deren Coefficienten nicht alle Null sind. Man kann daher diesen Grössen solche Werthe $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ beilegen, dass dieses Anfangsglied nicht verschwindet, also w_1 genau durch $(r-c)^{\lambda_1}$ theilbar ist. Sei also über die Grössen $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ der angegebenen Bedingung gemäss in einer beliebigen, aber bestimmten Weise verfügt, und sei alsdann $r-c$ ein λ_2-facher Lineartheiler sämmtlicher Coefficienten der bilinearen Form W_1; dann können und wollen wir den Variabeln derselben solche Werthe $u_\alpha = u_\alpha^{(2)}$, $v_\alpha = v_\alpha^{(2)}$ beilegen, dass w_2 nicht durch eine höhere Potenz von $r-c$ als die $\lambda_2$te theilbar wird. Ist dann $r-c$ genau ein λ_3-facher Lineartheiler sämmtlicher Coefficienten von W_2, so legen wir den Variabeln derselben solche Werthe $u_\alpha = u_\alpha^{(3)}$, $v_\alpha = v_\alpha^{(3)}$ bei, dass w_3 genau durch $(r-c)^{\lambda_3}$ theilbar wird, u. s. w.

Die Determinante $(2n+1)$ten Grades W_n verschwindet identisch, weil alle diejenigen Elemente derselben Null sind, welche $n+1$ Zeilen mit $n+1$, also mehr als $(2n+1)-(n+1)$ Colonnen gemeinsam haben. Wir behaupten aber, dass, wenn über die Grössen $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$; $u_\alpha^{(2)}$, $v_\alpha^{(2)}$; $u_\alpha^{(3)}$, $v_\alpha^{(3)}$ u. s. w. der Reihe nach in der angegebenen Weise verfügt wird, keine der Formen $W_1, \ldots W_{n-1}$ identisch verschwindet, mit andern Worten, dass das oben auseinandergesetzte Verfahren an keiner Stelle illusorisch wird. Ist nämlich $W_{\nu-1}$ nicht identisch Null, so ist auch w_ν von Null verschieden, da w_ν durch keine höhere Potenz von $r-c$ theilbar sein soll, als sämmtliche Coefficienten der Form $W_{\nu-1}$. Bezeichnen wir die Coefficienten der Elemente $c_{\alpha\beta}$, $u_\alpha^{(\varrho)}$, $v_\alpha^{(\varrho)}$ in der Determinante w_ν mit $C_{\alpha\beta}$, $U_\alpha^{(\varrho)}$, $V_\alpha^{(\varrho)}$, so ergibt sich durch Addition der Gleichungen

$$c_{\alpha 1}\, C_{\alpha 1} + \cdots + c_{\alpha n}\, C_{\alpha n} + v_\alpha^{(1)}\, V_\alpha^{(1)} + \cdots + v_\alpha^{(\nu)}\, V_\alpha^{(\nu)} = w_\nu \quad (\alpha = 1, \ldots n)$$

die Formel

$$\Sigma\, c_{\alpha\beta}\, C_{\alpha\beta} + \Sigma\, v_\alpha^{(\varrho)}\, V_\alpha^{(\varrho)} = n w_\nu ,$$

wo nach α und β von 1 bis n, nach ϱ von 1 bis ν zu summiren ist.

Ferner ergibt sich durch Addition der ν Gleichungen

$$v_1^{(\varrho)} V_1^{(\varrho)} + \cdots + v_n^{(\varrho)} V_n^{(\varrho)} = w_\nu$$

die Formel

$$\Sigma\, v_\alpha^{(\varrho)} V_\alpha^{(\varrho)} = \nu w_\nu,$$

und durch Subtraction dieser beiden Formeln

$$\Sigma\, c_{\alpha\beta}\, C_{\alpha\beta} = (n-\nu) w_\nu$$

(Vgl. *Gundelfinger* in *Hesse*, anal. Geom. d. R., 3. Aufl., S. 453). Wäre nun $W_\nu = -\Sigma C_{\alpha\beta}\, u_\alpha\, v_\beta$ identisch Null, so müssten die Coefficienten $C_{\alpha\beta}$ dieser Form sämmtlich verschwinden, und folglich auch $(n-\nu) w_\nu$, was nicht der Fall ist.

Setzt man nun in der Relation (1.) $u_\alpha = u_\alpha^{(\nu+1)}$, $v_\alpha = v_\alpha^{(\nu+1)}$, so ist die linke Seite derselben genau durch die $(\lambda_{\nu-1} + \lambda_{\nu+1})$te, die rechte Seite aber wenigstens durch die $2\lambda_\nu$te Potenz von $r-c$ theilbar; folglich ist

$$\lambda_{\nu-1} + \lambda_{\nu+1} \geqq 2\lambda_\nu,\quad \lambda_{\nu-1} - \lambda_\nu \geqq \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}$$

oder, wenn man

$$(2.) \qquad \varepsilon_\nu = \lambda_{\nu-1} - \lambda_\nu$$

setzt,

$$(3.) \qquad \varepsilon_\nu \geqq \varepsilon_{\nu+1}.$$

Die Determinante $2n$ten Grades w_n zerfällt in das Product der beiden Determinanten $n$ten Grades $|u_\mu^{(\nu)}|$ und $|v_\mu^{(\nu)}|$, ist also von r unabhängig; da sie ausserdem nicht Null ist, so ist $\lambda_n = 0$. Ist also unter den (ihrer Bedeutung nach nicht negativen) Zahlen $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots$ die erste, welche nicht verschwindet, $\lambda_{\varkappa-1}$, so sind $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots \varepsilon_{\varkappa+1} = 0$, dagegen ist $\varepsilon_\varkappa = \lambda_{\varkappa-1} > 0$, und folglich sind nach (3.) auch die Zahlen $\varepsilon_{\varkappa-1}, \ldots \varepsilon_1$ positiv. Nach Gleichung (2.) ist daher

$$(4.) \qquad \lambda > \lambda_1 > \cdots > \lambda_{\varkappa-1} > 0,\ \lambda_\varkappa = \lambda_{\varkappa+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Aus der Formel (1.) folgt

$$\frac{W_{\nu-1}}{w_{\nu-1}} - \frac{W_\nu}{w_\nu} = \frac{U_\nu V_\nu}{w_{\nu-1}\, w_\nu},$$

und daraus, wenn man nach ν von 1 bis n summirt,

$$(5.) \qquad \frac{W}{w} = \frac{U_1 V_1}{w w_1} + \frac{U_2 V_2}{w_1 w_2} + \cdots + \frac{U_n V_n}{w_{n-1} w_n}.$$

Der Quotient $-\frac{w_{\nu-1}\,w_\nu}{(r-c)^{\lambda_{\nu-1}+\lambda_\nu}}$ ist eine ganze Function von r, die für $r=c$ nicht verschwindet. Dieselbe möge irgendwie in zwei Factoren p_ν, q_ν zerlegt werden, welche entweder ganze Functionen sind oder auch nur in der Umgebung der Stelle $r=c$ den Charakter ganzer Functionen haben, d. h. nach ganzen positiven Potenzen von $r-c$ entwickelt werden können. U_ν ist eine lineare Function von $u_1, \dots u_n$, welche aus $W_{\nu-1}$ entsteht, indem man $v_\alpha = v_\alpha^{(\nu)}$ setzt, und daher ebenso wie $W_{\nu-1}$ durch die $\lambda_\nu$te Potenz von $r-c$ theilbar, aber auch für unbestimmte Werthe von $u_1 \dots u_n$ durch keine höhere Potenz, weil sie für $u_\alpha = u_\alpha^{(\nu)}$ in w_ν übergeht.

Ist also, nach steigenden Potenzen von $r-c$ entwickelt,

$$\text{(6.)} \qquad \frac{U_\nu}{p_\nu} = (r-c)^{\lambda_\nu}\left(X_1 + X_2(r-c) + X_3(r-c)^2 + \cdots\right)$$

und ebenso

$$\text{(7.)} \qquad \frac{V_\nu}{q_\nu} = (r-c)^{\lambda_\nu}\left(Y_1 + Y_2(r-c) + Y_3(r-c)^2 + \cdots\right),$$

so wird

$$\text{(8.)} \qquad -\frac{U_\nu V_\nu}{w_{\nu-1}\,w_\nu} = \frac{(r-c)^{2\lambda_\nu}}{(r-c)^{\lambda_{\nu-1}+\lambda_\nu}}\left(X_1+X_2(r-c)+\cdots\right)\left(Y_1+Y_2(r-c)+\cdots\right),$$

und mithin sind die Coefficienten der -1ten und -2ten Potenz in dieser Entwickelung

$$F_\nu = \left[-\frac{U_\nu V_\nu}{w_{\nu-1}\,w_\nu}\right]_{(r-c)^{-1}} = X_1 Y_{\varepsilon_\nu} + X_2 Y_{\varepsilon_\nu -1} + \cdots + X_{\varepsilon_\nu} Y_1,$$

$$G_\nu = \left[-\frac{U_\nu V_\nu}{w_{\nu-1}\,w_\nu}\right]_{(r-c)^{-2}} = X_1 Y_{\varepsilon_\nu -1} + X_2 Y_{\varepsilon_\nu -2} + \cdots + X_{\varepsilon_\nu -1} Y_1.$$

Es sind daher nach Formel (5.) die Coefficienten von $(r-c)^{-1}$ und $(r-c)^{-2}$ in der Entwickelung von $-\frac{W}{w}$ nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$

$$\text{(9.)} \qquad \begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + F_3 + \cdots, \\ G &= G_1 + G_2 + G_3 + \cdots. \end{aligned}$$

Die Anzahl der linearen Verbindungen $X_1, X_2, \ldots$ der Variabeln u_α (und ebenso die der linearen Verbindungen $Y_1, Y_2 \ldots$ der Variabeln v_α), welche in diesen Ausdrücken vorkommen, ist gleich

$$(10.)\qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots = \lambda.$$

Sind $c, c', c'' \ldots$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $w = 0$, so möge die Umformung, welche so eben mit den Formen F und G, den Coefficienten der -1ten und -2ten Potenz von $r-c$ in der Partialbruchzerlegung von $-\frac{W}{w}$ vorgenommen worden ist, auch mit den Formen F' und G', den Coefficienten der -1ten und -2ten Potenz von $r-c'$ in jener Zerlegung ausgeführt werden, ebenso mit F'' und G'' u. s. w. Dabei ist zu bemerken, dass die Umformung der Formen F' und G' von derjenigen der Formen F und G gänzlich unabhängig ist, dass also die Constanten $u_\alpha^{(\nu)'}, v_\alpha^{(\nu)'}$, deren man sich bei dieser Transformation zu bedienen hat, mit den analogen Constanten $u_\alpha^{(\nu)}, v_\alpha^{(\nu)}$ in gar keiner Beziehung stehen. Da die Wahl aller dieser Constanten nur dadurch beschränkt ist, dass sie gewissen Gleichungen nicht genügen sollen, so kann man ihnen zwar, wie es in den bisherigen Darstellungen geschehen ist, auch solche Werthe beilegen, dass in allen diesen Umformungen ein und dasselbe Constantensystem angewendet werden kann (*Ws.*, S. 321—324, *Darboux*, p. 378—381); indessen ist es für die Folgerungen, die wir im Auge haben, von Wichtigkeit, dass jedes einzelne dieser Constantensysteme keinen überflüssigen Beschränkungen unterworfen wird.

Entwickelt man die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}-\frac{W}{w} = \frac{F}{r-c} + \frac{G}{(r-c)^2} + \cdots \\ + \frac{F'}{r-c'} + \frac{G'}{(r-c')^2} + \cdots \\ + \cdots\end{aligned}$$

nach absteigenden Potenzen von r, so erhält man

$$(11.)\qquad -\frac{W}{w} = \frac{F+F'+\cdots}{r} + \frac{(cF+G)+(c'F'+G')+\cdots}{r^2} + \cdots.$$

Setzt man in den Coefficienten von $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r^2}$ die Ausdrücke (9.) ein, so erscheinen dieselben durch

$$(12.)\qquad \lambda+\lambda'+\cdots=n$$

lineare Verbindungen $X_1, X_2, \dots X_n$ von $u_1, u_2 \dots u_n$ und ebenso viele Verbindungen $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ von $v_1, v_2, \dots v_n$ ausgedrückt.

Von nun an wollen wir unter X_ν diejenige lineare Function von $x_1, \dots x_n$ verstehen, welche aus dem bisherigen X_ν hervorgeht, indem man

$$u_\alpha = \frac{\partial A}{\partial y_\alpha}$$

setzt, und unter Y_ν diejenige lineare Function von $y_1, \dots y_n$, welche aus dem bisherigen Y_ν durch die Substitution

$$v_\alpha = \frac{\partial A}{\partial x_\alpha}$$

entsteht. Durch diese Substitution wird

$$W = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & \frac{\partial A}{\partial x_n} \\ \frac{\partial A}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial y_n} & 0 \end{vmatrix}, \quad r^2 W = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & r\frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & r\frac{\partial A}{\partial x_n} \\ r\frac{\partial A}{\partial y_1} & \cdots & r\frac{\partial A}{\partial y_n} & 0 \end{vmatrix}$$

oder, wenn man in dem letzten Ausdruck die ersten n Zeilen, der Reihe nach mit $x_1, \dots x_n$ multiplicirt, von der letzten subtrahirt und dann die ersten n Colonnen, der Reihe nach mit $y_1, \dots y_n$ multiplicirt, von der letzten subtrahirt,

$$r^2 W = \begin{vmatrix} ra_{11}-b_{11} & \cdots & ra_{1n}-b_{1n} & r\frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ ra_{n1}-b_{n1} & \cdots & ra_{nn}-b_{nn} & r\frac{\partial A}{\partial x_n} \\ \frac{\partial B}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial B}{\partial y_n} & -rA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ra_{11}-b_{11} & \cdots & ra_{1n}-b_{1n} & \frac{\partial B}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ ra_{n1}-b_{n1} & \cdots & ra_{nn}-b_{nn} & \frac{\partial B}{\partial x_n} \\ \frac{\partial B}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial B}{\partial y_n} & -rA-B \end{vmatrix},$$

also

$$-r^2\frac{W}{w} = rA + B + \frac{D}{r} + \frac{E}{r^2} + \cdots,$$

$$-\frac{W}{w} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{D}{r^3} + \frac{E}{r^4} + \cdots$$

(*Ws.*, S. 315; *Kronecker*, Berl. Mon. 1874, März). Vergleicht man diese Entwickelung mit (11.), so erhält man

$$(13.)\quad A = F + F' + \cdots = \Sigma(X_1 Y_\varepsilon + X_2 Y_{\varepsilon-1} + \cdots + X_\varepsilon Y_1),$$

$$(14.)\quad B = (cF+G)+(c'F'+G')+\cdots = \Sigma\begin{pmatrix} c(X_1 Y_\varepsilon + X_2 Y_{\varepsilon-1} + \cdots + X_\varepsilon Y_1) \\ + X_1 Y_{\varepsilon-1} + \cdots + X_{\varepsilon-1} Y_1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergiebt sich zunächst der Satz, dass die n linearen Verbindungen $X_1, X_2, \ldots$ der Variabeln $x_1, \ldots x_n$ und ebenso die n Verbindungen $Y_1, Y_2, \ldots$ der Variabeln $y_1, \ldots y_n$ unter einander unabhängig sind. Denn wenn z. B. $X_1, X_2, \ldots$ nicht unabhängig wären, so würde die Form A durch n nicht unabhängige, also durch weniger als n unabhängige Variabeln ausdrückbar sein, während nach der Annahme die Determinante von A von Null verschieden sein soll.

Es ist damit bewiesen, dass durch die Einführung der neuen $2n$ unabhängigen Variabeln X_α, Y_α an Stelle der x_α, y_α die Formenschaar $C = rA - B$ in eine andere

$$(15.)\quad R = rP - Q = \Sigma\{(r-c)(X_1 Y_\varepsilon + X_2 Y_{\varepsilon-1} + \cdots + X_\varepsilon Y_1) - (X_1 Y_{\varepsilon-1} + \cdots + X_{\varepsilon-1} Y_1)\}$$

übergeführt wird, welche die Reducirte der gegebenen Formenschaar heisst.

§. 2.

Die Aequivalenz von Schaaren bilinearer Formen.

Wenn die Schaar von bilinearen Formen

$$C = \Sigma c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = \Sigma(r a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$$

durch die Substitutionen

$$(1.)\quad x_\alpha = \sum_\gamma x_{\alpha\gamma} X_\gamma,\quad y_\beta = \sum_\delta y_{\beta\delta} Y_\delta,$$

deren Determinanten von Null verschieden und deren Coefficienten von r unabhängig sind, in die Schaar

$$R = \Sigma r_{\gamma\delta} X_\gamma Y_\delta = \Sigma(r p_{\gamma\delta} - q_{\gamma\delta}) X_\gamma Y_\delta$$

übergeht, so wollen wir die beiden Schaaren C und R **äquivalent** nennen. Alsdann ist

$$|rp_{\alpha\beta}-q_{\alpha\beta}| = |x_{\alpha\beta}|\;|ra_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta}|\;|y_{\alpha\beta}|,$$

also jeder Theiler von der Determinante der einen Formenschaar auch ein Theiler von der Determinante der andern. Ferner lässt sich jede νte Unterdeterminante von $|r_{\alpha\beta}|$ als eine lineare homogene Function der sämmtlichen ν ten Unterdeterminanten von $|c_{\alpha\beta}|$ darstellen, und daher ist ein gemeinschaftlicher Theiler der letzteren auch ein Theiler der ersteren. Da aber umgekehrt R durch die inversen Substitutionen von (1.) in C übergeht, so gilt auch das Umgekehrte, und folglich stimmt der grösste gemeinschaftliche Theiler aller ν ten Unterdeterminanten von $|r_{\alpha\beta}|$ mit dem aller ν ten Unterdeterminanten von $|c_{\alpha\beta}|$ überein (*Ws.*, S. 313). Ist also $r-c$ ein l-facher Lineartheiler der Determinante $|c_{\alpha\beta}|$ und ein l_ν-facher des grössten gemeinsamen Theilers aller ν ten Unterdeterminanten derselben, so bleiben bei jeder Transformation der Formenschaar C die Wurzeln $c, c', \dots$ der Gleichung $|c_{\alpha\beta}| = 0$ und für jede dieser Wurzeln die Zahlen $l, l_1, l_2, \dots$ unverändert (*Sylvester*, Phil. mag., Feb. 1851, S. 121).

Nun ist im Vorigen bewiesen worden, dass die Schaar bilinearer Formen C durch lineare Substitutionen von der Gestalt (1.) in die Formenschaar

$$R = \Sigma\left\{(r-c)\,(X_1Y_\varepsilon+\dots+X_\varepsilon Y_1)-(X_1Y_{\varepsilon-1}+\dots+X_{\varepsilon-1}Y_1)\right\}$$

verwandelt werden kann. Der Exponent der Potenz von $r-c$, welche die Determinante dieser reducirten Form theilt, ist gleich $\lambda = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n$. Wir behaupten ferner, dass der Exponent der höchsten Potenz von $r-c$, durch welche ihre ν ten Unterdeterminanten sämmtlich theilbar sind, gleich $\lambda_\nu = \varepsilon_{\nu+1}+\dots+\varepsilon_n$ ist. Um dieses einzusehen, setze man

$$R = S+T,$$

wo

$$S=(r-c)\,(X_1Y_{\varepsilon_1}+\dots+X_{\varepsilon_1}Y_1)-(X_1Y_{\varepsilon_1-1}+\dots+X_{\varepsilon_1-1}Y_1)\,,$$

$$\begin{aligned}T=&(r-c)(X_{\varepsilon_1+1}Y_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}+\dots+X_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Y_{\varepsilon_1+1})-(X_{\varepsilon_1+1}Y_{\varepsilon_1+\varepsilon_2-1}+\dots+X_{\varepsilon_1+\varepsilon_2-1}Y_{\varepsilon_1+1})\\&+\dots\\&+(r-c')(X_{\lambda+1}Y_{\lambda+\varepsilon'}+\dots+X_{\lambda+\varepsilon'}Y_{\lambda+1})-(X_{\lambda+1}Y_{\lambda+\varepsilon'-1}+\dots+X_{\lambda+\varepsilon'-1}Y_{\lambda+1})\\&+\dots\end{aligned}$$

ist. Wir nehmen an, der zu begründende Satz sei für die Form T, die in ganz ähnlicher Weise wie R zusammengesetzt ist, bereits bewiesen, es sei also der Exponent der Potenz von $r-c$, durch welche ihre νten Unterdeterminanten sämmtlich theilbar sind, gleich $\varepsilon_{\nu+2}+\cdots+\varepsilon_n$. Die Determinante von S ist $\pm(r-c)^{\varepsilon_1}$; von ihren ersten Unterdeterminanten ist eine gleich ± 1, nämlich die Determinante der Form von ε_1-1 Variabelnpaaren

$$(r-c)(X_2 Y_{\varepsilon_1-1}+\cdots+X_{\varepsilon_1-1}Y_2)-(X_1 Y_{\varepsilon_1-1}+\cdots+X_{\varepsilon_1-1}Y_1),$$

welche man aus S erhält, indem man $X_{\varepsilon_1}=Y_{\varepsilon_1}=0$ setzt, und ebenso ist unter den höheren Unterdeterminanten von S stets eine gleich 1. Da die Formen S und T keine Variabeln gemeinsam haben, so ist, wie leicht zu sehen, jede von 0 verschiedene νte Unterdeterminante von R das Product einer σten Unterdeterminante von S mit einer τten Unterdeterminante von T, wo $\sigma+\tau=\nu$ ist; daher findet man den Exponenten derjenigen Potenz von $r-c$, durch welche alle νten Unterdeterminanten von R theilbar sind, folgendermassen: man zerlegt die Zahl ν auf alle möglichen Arten in zwei Summanden $\sigma+\tau$, von denen $\sigma \lesseqgtr \varepsilon_1$ und $\tau \lesseqgtr n-\varepsilon_1$ ist; sind dann alle σten Unterdeterminanten von S durch die αte, und alle τten Unterdeterminanten von T durch die βte Potenz von $r-c$ theilbar, so ist die kleinste den verschiedenen Zerlegungen von ν entsprechende Summe $\alpha+\beta$ gleich dem gesuchten Exponenten. Nach den obigen Auseinandersetzungen ist derselbe demnach gleich der kleinsten der Zahlen

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1+(\varepsilon_{\nu+2}+\varepsilon_{\nu+3}+\cdots+\varepsilon_n), \\ \quad\;\;(\varepsilon_{\nu+1}+\varepsilon_{\nu+2}+\cdots+\varepsilon_n), \\ \quad\;\;(\varepsilon_{\nu}\;\;+\varepsilon_{\nu+1}+\cdots+\varepsilon_n), \\ \quad\;\;\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

also wegen der Ungleichheiten (3.) §. 1 gleich der zweiten derselben, d. h. gleich λ_ν. (Vgl. *Ws.*, §. 4).

Da nun der grösste gemeinschaftliche Divisor der νten Unterdeterminanten einer Schaar C, wie oben auseinandergesetzt, mit demjenigen der νten Unterdeterminanten einer äquivalenten Schaar übereinstimmt, so ergeben sich aus dem so eben bewiesenen Satze als Hauptresultat unserer ganzen Untersuchung die Gleichungen

$$(2.)\qquad l_1=\lambda_1,\quad l_2=\lambda_2,\;\ldots,$$

und folglich, wenn man

$$e_\nu = l_{\nu-1} - l_\nu$$

setzt, die Gleichungen

$$(3.)\qquad e_1 = s_1,\quad e_2 = s_2,\ \ldots$$

Aus den Formeln (3.) und (4.) §. 1 ergiebt sich daher*)

$$(4.)\qquad e_1 \geqq e_2 \cdots \geqq e_\varkappa > 0, \qquad e_{\varkappa+1} = e_{\varkappa+2} = \cdots = e_n = 0,$$

$$(5.)\qquad l > l_1 > l_2 \cdots > l_{\varkappa-1} > 0, \qquad l_\varkappa = l_{\varkappa+1} = \cdots = l_n = 0.$$

Zufolge der Gleichung (15.) §. 1 ist die reducirte Form nur von den Wurzeln c, c', c'' ... der Gleichung $w = 0$ und den zu jeder einzelnen Wurzel gehörigen Zahlen l, l_1, l_2 ... abhängig. Zwei Formenschaaren, für welche diese Invarianten übereinstimmen, können daher in dieselbe reducirte Form und folglich auch in einander transformirt werden. Damit also zwei Formenschaaren von nicht verschwindenden Determinanten äquivalent seien, ist nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, dass für $\nu = 0, 1, \ldots (n-1)$ der grösste gemeinschaftliche Divisor der νten Unterdeterminanten der einen demjenigen der νten Unterdeterminanten der andern gleich sei. (*Ws.*, S. 314). Mit andern Worten: Das im Eingang dieses Paragraphen aufgestellte System von Invarianten der Formenschaar C ist ein vollständiges. Man kann dasselbe auch durch die Ausdrücke

$$(r-c)^{e_1},\ (r-c)^{e_2}, \ldots,\ (r-c')^{e'_1} \ldots$$

ersetzen, welche Herr *Weierstrass* die *Elementartheiler* der Determinante w genannt hat.

Durch Vergleichung der Definition der Zahlen l_ν mit der wesentlich davon abweichenden Definition der Zahlen λ_ν ergeben sich ferner die folgenden Sätze.

---

*) Die Ungleichheiten (5.) hat Herr *Weierstrass* aus der Bemerkung hergeleitet, dass die Ableitung einer Determinante eine lineare Verbindung ihrer ersten Unterdeterminanten ist; indessen lässt sich unsere Deduction der Formeln (5.) aus den Formeln (4.) auch auf den Fall übertragen, wo die Coefficienten von C nicht ganze Functionen ersten Grades, sondern ganze Zahlen sind.

I. *Ist die Determinante w der Schaar bilinearer Formen $C = rA - B$ nicht identisch Null, und bestimmt man in den Determinanten*

$$W_{\nu-1} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & v_1^{(1)} & \dots & v_1^{(\nu-1)} & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & v_n^{(1)} & \dots & v_n^{(\nu-1)} & v_n \\ u_1^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\nu-1)} & \dots & u_n^{(\nu-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & \dots & u_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad w_\nu = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & v_1^{(1)} & \dots & v_1^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & v_n^{(1)} & \dots & v_n^{(\nu)} \\ u_1^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\nu)} & \dots & u_n^{(\nu)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

die Constanten $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ $(\alpha = 1, \dots n)$ so, dass w_1 durch keine höhere Potenz des Linearfactors $r - c$ der Determinante w theilbar ist als alle Coefficienten der bilinearen Form W, alsdann die Constanten $u_\alpha^{(2)}$, $v_\alpha^{(2)}$ so, dass w_2 durch keine höhere Potenz von $r - c$ theilbar ist als alle Coefficienten von W_1 u. s. w., so ist w_ν durch keine höhere Potenz von $r - c$ theilbar als sämmtliche νten Unterdeterminanten von w.

Oder anders ausgedrückt:

Bestimmt man die $2n$ Constanten $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ so, dass die Determinante w_1 den Linearfactor $r - c$ der Determinante w in einem möglichst niedrigen Grade enthält, alsdann die $2n$ Constanten $u_\alpha^{(2)}$, $v_\alpha^{(2)}$ so, dass w_2 diesen Factor in dem niedrigsten Grade enthält, welcher nach der Wahl von $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ noch möglich ist, u. s. w., so enthält w_ν den Factor $r - c$ in dem niedrigsten Grade, welcher überhaupt durch irgend eine Wahl der $2n\nu$ in w_ν eingehenden Constanten erreicht werden kann.

Berücksichtigt man gleichzeitig alle Wurzeln der Gleichung $w = 0$, so erhält man weiter den Satz:

II. *Bestimmt man die Constanten $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ so, dass w und w_1 keinen grösseren Theiler gemeinsam haben als alle Coefficienten von W, alsdann $u_\alpha^{(2)}$, $v_\alpha^{(2)}$ so, dass w und w_2 keinen grösseren Theiler gemeinsam haben als alle Coefficienten von W_1 u. s. w., so stimmt der grösste gemeinschaftliche Divisor von w und w_ν mit dem aller νten Unterdeterminanten von w überein.*

Ferner folgt aus dem Satze I. und den Gleichungen (5.):

III. *Wählt man in irgend einer Weise die Constanten* $u_\alpha^{(\varrho)}$, $v_\alpha^{(\varrho)}$ $(\alpha = 1, \dots n;\ \varrho = 1, \dots \nu)$ *so, dass jede der* ν *Determinanten* w_ϱ *durch keine höhere Potenz des Linearfactors* $r-c$ *von* w *theilbar ist als alle* ϱ*ten Unterdeterminanten von* w, *so kann man die* $2n$ *Constanten* $u_\alpha^{(\nu+1)}$, $v_\alpha^{(\nu+1)}$ *immer noch so wählen, dass auch* $w_{\nu+1}$ *durch keine höhere Potenz von* $r-c$ *theilbar ist als alle* $(\nu+1)$*ten Unterdeterminanten von* w.

Die Bedingungen, denen die $2n^2$ Constanten $u_\alpha^{(\varrho)}$, $v_\alpha^{(\varrho)}$ $(\alpha, \varrho = 1, \dots n)$ zu genügen haben, bestehen darin, dass 1) w_1 genau durch $(r-c)^{l_1}$, 2) w_2 genau durch $(r-c)^{l_2}$, ... n) w_n genau durch $(r-c)^{l_n}$ theilbar wird. Die $2n$ Grössen $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ haben also n Bedingungen zu genügen; sie sind nämlich so zu bestimmen, dass die Bedingung 1) erfüllt ist und die Bedingungen 2), 3) ... n) noch erfüllbar sind. Ebenso haben die Grössen $u_\alpha^{(2)}$, $v_\alpha^{(2)}$ $n-1$ Bedingungen zu genügen u. s. w. Die oben entwickelten Sätze sagen nun aus, dass sich die erwähnten $n+(n-1)+\cdots+1$ Bedingungen auf n reduciren; denn ihnen zufolge ist nur nothwendig, die Grössen $u_\alpha^{(1)}$, $v_\alpha^{(1)}$ der Bedingung 1) gemäss zu wählen, da alsdann die Bedingungen 2), 3) ... n) stets noch erfüllbar sind, u. s. w.

§. 3.

Transformation des Parameters einer Formenschaar.

In §. 1 haben wir, um die Formenschaar $C = rA - B$ von nicht verschwindender Determinante auf die Normalform zu reduciren, die Annahme gemacht, dass für A eine Form der Schaar gewählt sei, deren Determinante von Null verschieden ist. Da diese Voraussetzung für gewisse specielle Untersuchungen lästig ist, so wollen wir nachweisen, dass jene Entwickelungen unter geringen Modificationen auch ohne diese Voraussetzung gültig bleiben. Wir werden nämlich den folgenden Satz ableiten:

IV. *Ist die Determinante* $\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon$ *von Null verschieden, ist*

$$(1.)\qquad A = \alpha A' + \beta B', \quad B = \gamma A' + \delta B',$$

$$(2.)\qquad r = \frac{\gamma + \delta r'}{\alpha + \beta r'}, \quad r' = \frac{-\gamma + \alpha r}{\delta - \beta r},$$

$$(3.)\qquad rA - B = (\delta - \beta r)(r'A' - B'),$$

sind c und c' zwei correspondirende endliche Werthe von r und r', für welche die Determinanten w und w' von $rA-B$ und $r'A'-B'$ verschwinden, also

$$(4.)\qquad c=\frac{\gamma+\delta c'}{\alpha+\beta c'},\quad c'=\frac{-\gamma+\alpha c}{\delta-\beta c},$$

ist ferner

$$W=\begin{vmatrix} ra_{11}-b_{11} & \cdots & ra_{1n}-b_{1n} & \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ ra_{n1}-b_{n1} & \cdots & ra_{nn}-b_{nn} & \frac{\partial A}{\partial x_n} \\ \frac{\partial A}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial y_n} & 0 \end{vmatrix},\quad W'=\begin{vmatrix} r'a'_{11}-b'_{11} & \cdots & r'a'_{1n}-b'_{1n} & \frac{\partial A'}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ r'a'_{n1}-b'_{n1} & \cdots & r'a'_{nn}-b'_{nn} & \frac{\partial A'}{\partial x_n} \\ \frac{\partial A'}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial A'}{\partial y_n} & 0 \end{vmatrix},$$

und sind in den Entwickelungen von $-\frac{W}{w}$ *und* $-\frac{W'}{w'}$ *nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ und $r'-c'$ die Coefficienten der -1ten und -2ten Potenzen gleich F, G und F', G', so ist*

$$(5.)\qquad \begin{aligned} F &= \alpha F'+\beta(c'F'+G'), \\ cF+G &= \gamma F'+\delta(c'F'+G'). \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (3.) folgt, dass die reciproke Form von $rA-B$ gleich ist $(\delta-\beta r)^{-1}$ mal der reciproken Form von $r'A'-B'$ oder

$$(\delta-\beta r)\frac{W}{w}=\begin{vmatrix} r'a'_{11}-b'_{11} & \cdots & r'a'_{1n}-b'_{1n} & \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ r'a'_{n1}-b'_{n1} & \cdots & r'a'_{nn}-b'_{nn} & \frac{\partial A}{\partial x_n} \\ \frac{\partial A}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial y_n} & 0 \end{vmatrix} : w'.$$

In der Determinante, welche den Zähler der rechten Seite dieser Formel bildet, setze man

$$\frac{\partial A}{\partial y_\sigma}=\alpha\frac{\partial A'}{\partial y_\sigma}+\beta\frac{\partial B'}{\partial y_\sigma}=-\beta\left(r'\frac{\partial A'}{\partial y_\sigma}-\frac{\partial B'}{\partial y_\sigma}\right)+(\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial y_\sigma}$$

und addire dann die ϱte Zeile ($\varrho = 1, \dots n$), mit βx_ϱ multiplicirt, zur letzten; dann erhält man

$$\begin{vmatrix} r'a'_{11}-b'_{11} & \cdots & r'a'_{1n}-b'_{1n} & \frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ r'a'_{n1}-b'_{n1} & \cdots & r'a'_{nn}-b'_{nn} & \frac{\partial A}{\partial x_n} \\ (\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial y_1} & \cdots & (\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial y_n} & \beta A \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier

$$\frac{\partial A}{\partial x_\varrho} = -\beta\left(r'\frac{\partial A'}{\partial x_\varrho} - \frac{\partial B'}{\partial x_\varrho}\right) + (\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial x_\varrho}$$

und addirt die σte Colonne, mit βy_σ multiplicirt, zur letzten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} r'a'_{11}-b'_{11} & \cdots & r'a'_{1n}-b'_{1n} & (\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial x_1} \\ & & & \\ r'a'_{n1}-b'_{n1} & \cdots & r'a'_{nn}-b'_{nn} & (\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial x_n} \\ (\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial y_1} & \cdots & (\alpha+\beta r')\frac{\partial A'}{\partial y_n} & \beta A+\beta(\alpha+\beta r')A' \end{vmatrix} = \beta\left[A+(\alpha+\beta r')A'\right]w' + (\alpha+\beta r')^2 W'.$$

Da

$$(6.) \qquad (\alpha+\beta r')(\delta-\beta r) = \varepsilon$$

ist, so erhält man schliesslich die Formel

$$(7) \qquad \frac{W}{w} = \frac{\beta A+\beta(\alpha+\beta r')A'}{\delta-\beta r} + \frac{\varepsilon^2}{(\delta-\beta r)^3}\,\frac{W'}{w'}.$$

Da c und c' als endlich vorausgesetzt sind, so müssen nach Formel (4.) $\delta-\beta c$ und $\alpha+\beta c'$ von Null verschieden sein. Ist nun, nach aufsteigenden Potenzen von $r'-c'$ entwickelt,

$$-\frac{W'}{w'} = \cdots + \frac{H'}{(r'-c')^3} + \frac{G'}{(r'-c')^2} + \frac{F'}{r'-c'} + \cdots,$$

und setzt man in dieser Formel

$$r'-c' = \frac{\varepsilon(r-c)}{(\delta-\beta r)(\delta-\beta c)},$$

so ergiebt sich

$$(8.)\qquad -\frac{\varepsilon^2}{(\delta-\beta r)^3}\frac{W'}{w'}=\cdots+\frac{H'(\delta-\beta c)^3}{\varepsilon(r-c)^3}+\frac{G'(\delta-\beta c)^2}{(\delta-\beta r)(r-c)^2}+\frac{\varepsilon F'(\delta-\beta c)}{(\delta-\beta r)^2(r-c)}+\cdots.$$

Entwickelt man auf der rechten Seite dieser Gleichung jedes einzelne Glied nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$, so kommen die -1te und -2te Potenz nur in den Entwickelungen der letzten beiden hingeschriebenen Glieder vor. Ist daher, in derselben Weise entwickelt,

$$-\frac{W}{w}=\cdots+\frac{G}{(r-c)^2}+\frac{F}{r-c}+\cdots,$$

so ist nach den Formeln (7.) und (8.)

$$G=(\delta-\beta c)G',$$

$$F=\beta G'+\frac{\varepsilon}{\delta-\beta c}F'.$$

Mit Hülfe der Relationen

$$(\alpha+\beta c')(\delta-\beta c)=\varepsilon,$$

$$(\alpha+\beta c')c=\gamma+\delta c'$$

kann man diese Gleichungen auf die Form (5.) bringen.

§. 4.

Erläuterung des Satzes I. durch ein Beispiel.

Um die Bedeutung der im §. 2 entwickelten Sätze in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir nun über die Constanten $u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu)}$ eine besonders einfache Verfügung treffen, nämlich von den n Grössen einer Reihe eine gleich Eins und die übrigen $n-1$ gleich Null wählen. Der Bequemlichkeit der Darstellung halber wollen wir aber die speciellen Sätze, zu denen man so gelangt, selbstständig ableiten.

Es sei $C=rA-B$ eine Schaar bilinearer Formen, deren Determinante w nicht identisch verschwindet, $r-c$ ein λ-facher Lineartheiler der Determinante w und ein λ_1-facher Lineartheiler ihrer sämmtlichen ersten Unterdeterminanten; sei w_1 eine solche erste Unterdeterminante von w, welche durch keine höhere Potenz von $r-c$ als die $\lambda_1$te theilbar ist; sei $r-c$ ein λ_2-facher Lineartheiler der sämmtlichen ersten Unterdeterminanten von w_1, und w_2 eine solche erste Unterdeterminante von w_1,

welche durch keine höhere Potenz von $r-c$ als die $\lambda_2$te theilbar ist; sei $r-c$ ein λ_3-facher Lineartheiler der sämmtlichen ersten Unterdeterminanten von w_2, und w_3 eine erste Unterdeterminante von w_2, welche durch keine höhere Potenz von $r-c$ als die $\lambda_3$te theilbar ist, u. s. w. Ist

$$w_\nu = \begin{vmatrix} c_{\alpha\varrho} & \cdots & c_{\alpha\sigma} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{\beta\varrho} & \cdots & c_{\beta\sigma} \end{vmatrix}, \quad w_{\nu-1} = \begin{vmatrix} c_{\alpha\varrho} & \cdots & c_{\alpha\sigma} & c_{\alpha\tau} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{\beta\varrho} & \cdots & c_{\beta\sigma} & c_{\beta\tau} \\ c_{\gamma\varrho} & \cdots & c_{\gamma\sigma} & c_{\gamma\tau} \end{vmatrix},$$

so setzen wir

$$W_{\nu-1} = \begin{vmatrix} c_{\alpha\varrho} & \cdots & c_{\alpha\sigma} & c_{\alpha\tau} & v_\alpha \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\beta\varrho} & \cdots & c_{\beta\sigma} & c_{\beta\tau} & v_\beta \\ c_{\gamma\varrho} & \cdots & c_{\gamma\sigma} & c_{\gamma\tau} & v_\gamma \\ u_\varrho & \cdots & u_\sigma & u_\tau & 0 \end{vmatrix},$$

$$U_\nu = \begin{vmatrix} c_{\alpha\varrho} & \cdots & c_{\alpha\sigma} & c_{\alpha\tau} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{\beta\varrho} & \cdots & c_{\beta\sigma} & c_{\beta\tau} \\ u_\varrho & \cdots & u_\sigma & u_\tau \end{vmatrix}, \quad V_\nu = \begin{vmatrix} c_{\alpha\varrho} & \cdots & c_{\alpha\sigma} & v_\alpha \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{\beta\varrho} & \cdots & c_{\beta\sigma} & v_\beta \\ c_{\gamma\varrho} & \cdots & c_{\gamma\sigma} & v_\gamma \end{vmatrix}.$$

Dann ist

$$(1.) \qquad W_{\nu-1}\, w_\nu = W_\nu\, w_{\nu-1} - U_\nu\, V_\nu.$$

Diese Relation gilt für $\nu = 1, \dots n-1$ und bleibt auch für $\nu = n$ richtig, wenn man $w_n = 1$ setzt. Ist w_ν nicht Null, so können auch die ersten Unterdeterminanten von w_ν nicht alle verschwinden, und folglich ist auch $w_{\nu+1}$ von Null verschieden. Mithin sind $w, w_1, \dots w_n$ sämmtlich nicht Null. Aus der Formel (1.) ergeben sich nun genau wie in §. 1 die Ungleichheiten (3.) und (4.) §. 1, sodann die Umgestaltung der Formenschaar in die reducirte Form (15.), endlich daraus durch die Betrachtungen des §. 2 die Gleichungen (2.) §. 2. Es ergiebt sich demnach der Satz:

V. *Ist die Determinante w der Schaar bilinearer Formen*

$$C = \Sigma(ra_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})x_\alpha y_\beta$$

nicht identisch Null, ist $r-c$ ein Factor von w, w_1 eine erste Unterdeterminante von w, welche diesen Factor in keiner höhern Potenz enthält als irgend

eine andere erste Unterdeterminante von w, ferner w_2 eine erste Unterdeterminante von w_1, welche den Factor $r-c$ in keiner höheren Potenz enthält als irgend eine andere erste Unterdeterminante von w_1, u. s. w., w_ν eine erste Unterdeterminante von $w_{\nu-1}$, welche $r-c$ in keiner höhern Potenz enthält als irgend eine andere erste Unterdeterminante von $w_{\nu-1}$, so enthält w_ν jenen Factor in keiner höhern Potenz als irgend eine andere νte Unterdeterminante von w).*

§. 5.

Symmetrische Wahl der Constanten $u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu)}$.

Für die Reduction gewisser Schaaren von bilinearen Formen ist es nothwendig, die in §. 1 eingeführten Constanten $u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu)}$ noch weiteren Beschränkungen zu unterwerfen, als dort geschehen ist. Die gewöhnlichste Beschränkung dieser Art besteht darin, dass allgemein $u_\alpha^{(\nu)} = v_\alpha^{(\nu)}$ sein soll; und wir werden nun zeigen, dass man, wenn für einen bestimmten Werth von ν diese Gleichungen mit den bisher aufgestellten Ungleichheiten nicht verträglich sind, bei dem Werthe $\nu+1$ die Symmetrie dadurch wieder herstellen kann, dass man $u_\alpha^{(\nu+1)} = v_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu+1)} = u_\alpha^{(\nu)}$ setzt.

Die Grössen $u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu)}$ sind so zu wählen, dass die bilineare Form $H = \Sigma h_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$, welche den Coefficienten des Anfangsgliedes in der Entwickelung von $W_{\nu-1}$ nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ bildet, für $u_\alpha = u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha = v_\alpha^{(\nu)}$ nicht verschwindet. Nun ist H für $u_\alpha = v_\alpha$ nur dann identisch Null, wenn $h_{\alpha\alpha} = 0$, $h_{\alpha\beta} = -h_{\beta\alpha}$, d. h. wenn H eine alternirende Form ist.

Demzufolge kann man z. B. stets $u_\alpha^{(\nu)} = v_\alpha^{(\nu)}$ $(\alpha, \nu = 1, \ldots n)$ wählen, wenn die gegebene bilineare Form C eine symmetrische ist. Denn

---

*) Der oben bewiesene Satz zeigt, dass die vorläufige Umgestaltung, welche Herr *Weierstrass* (l. c. S. 321.) mit der Formenschaar $s\varphi-\psi$ vornimmt, ehe er sie auf die Normalform reducirt, durch eine blosse Vertauschung der Variabeln ersetzt werden kann. Dabei muss man freilich für jede einzelne Wurzel eine besondere Anordnung zu Grunde legen, und ferner geht der Vortheil verloren, dass die Transformation in die reducirte Form auch für Schaaren von quadratischen Formen ohne Weiteres anwendbar bleibt.

dann ist zunächst auch W symmetrisch, mithin auch das Anfangsglied H von W, und demnach kann man $u_\alpha^{(1)} = v_\alpha^{(1)}$ setzen. Dann ist aber auch W_1 symmetrisch, und folglich kann man wieder $u_\alpha^{(2)} = v_\alpha^{(2)}$ setzen, u. s. w. Die Substitutionen, durch welche die Schaar C in die Schaar (15.) §. 1 übergeht, sind alsdann congruent, vorausgesetzt, dass man in der Formel (8.) §. 1

$$p_\nu = q_\nu = \sqrt{\left(-\frac{w_\nu\, w_{\nu-1}}{(r-c)^{\lambda_\nu + \lambda_{\nu-1}}}\right)}$$

wählt. Setzt man dann in der Gleichung (15.) §. 1 $y_\alpha = x_\alpha$, so wird auch $Y_\alpha = X_\alpha$, und man erhält so die Reduction der Schaaren quadratischer Formen auf die Normalform (Vgl. *Ws.*, S. 332).

Wir setzen nun, um zum allgemeinen Falle zurückzukehren, voraus, dass für einen bestimmten Werth von ν der Coefficient H des Anfangsgliedes von $W_{\nu-1}$ eine alternirende Form ist. Die Abhängigkeit dieser Form von den Variabeln u_α, v_α wollen wir symbolisch dadurch andeuten, dass wir $H(u, v)$ für H schreiben. Die bilineare Form

$$W_{\nu-1} = H(u,v)\,(r-c)^{l_\nu} + \cdots$$

geht für $u_\alpha = u_\alpha^{(\nu)}$ in die lineare Form V_ν, für $v_\alpha = v_\alpha^{(\nu)}$ in die lineare Form U_ν, und für $u_\alpha = u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha = v_\alpha^{(\nu)}$ in w_ν über. Daher ist

$$\begin{aligned} V_\nu &= H(u^{(\nu)}, v)\ \ (r-c)^{l_\nu} + \cdots, \\ U_\nu &= H(u, v^{(\nu)})\ \ (r-c)^{l_\nu} + \cdots, \\ w_\nu &= H(u^{(\nu)}, v^{(\nu)})(r-c)^{l_\nu} + \cdots, \end{aligned}$$

und folglich ist (vgl. die folgende Abh. des Herrn *Frobenius*, §. 4)

$$(1.)\quad w_{\nu-1} W_\nu = w_\nu W_{\nu-1} - U_\nu V_\nu = \{H(u^{(\nu)}, v^{(\nu)})H(u,v) - H(u^{(\nu)}, v)H(u, v^{(\nu)})\}(r-c)^{2l_\nu} + \cdots.$$

Der Exponent der Potenz von $(r-c)$, durch welche $w_{\nu-1} W_\nu$ theilbar ist, ist daher genau gleich $2l_\nu$ oder grösser, je nachdem

$$H(u^{(\nu)}, v^{(\nu)})H(u, v) - H(u^{(\nu)}, v)H(u, v^{(\nu)})$$

für alle Werthe von $u_1, v_1, \ldots u_n, v_n$ verschwindet oder nicht. Ist nun H eine alternirende Form, so kann dieser Ausdruck nicht identisch verschwinden, weil er sich für $u_\alpha = v_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha = u_\alpha^{(\nu)}$ auf $-(H(u^{(\nu)}, v^{(\nu)}))^2$ reducirt, welches zufolge der Annahme über w_ν nicht verschwindet. Nun ist aber

$w_{\nu-1} W_\nu$ genau durch die $(l_{\nu-1}+l_{\nu+1})$te Potenz von $r-c$ theilbar. Wir schliessen daraus, dass, falls H alternirend ist,

$$(2.)\qquad l_{\nu-1}+l_{\nu+1}=2l_\nu,\quad e_\nu=e_{\nu+1}$$

sein muss. Die $2n$ Grössen $u_\alpha^{(\nu+1)}$, $v_\alpha^{(\nu+1)}$ sind nun so zu wählen, dass W_ν für $u_\alpha=u_\alpha^{(\nu+1)}$, $v_\alpha=v_\alpha^{(\nu+1)}$ genau durch die $l_{\nu+1}$te Potenz von $r-c$ theilbar ist; dies ist aber nach den obigen Auseinandersetzungen der Fall, wenn man $u_\alpha^{(\nu+1)}=v_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu+1)}=u_\alpha^{(\nu)}$ wählt.

Ehe wir zu Anwendungen der gewonnenen Resultate übergehen, wollen wir rasch die eigentliche Quelle der Formel (2.) aufweisen. Aus der Gleichung (1.) (wo jetzt H nicht alternirend zu sein braucht) folgt, dass $e_\nu > e_{\nu+1}$ ist, wenn die Gleichung

$$(3.)\qquad H\left(u^{(\nu)}, v^{(\nu)}\right)H(u, v)-H\left(u^{(\nu)}, v\right)H\left(u, v^{(\nu)}\right)=0$$

stattfindet, dagegen $e_\nu=e_{\nu+1}$, wenn sie nicht stattfindet. Diese Gleichung sagt aber aus, dass die bilineare Form $H(u, v)$ in das Product einer linearen Form der Grössen $u_1, \dots u_n$ und einer linearen Form der Grössen $v_1, \dots v_n$ zerfällt. Wenn umgekehrt die bilineare Form H in das Product zweier Linearformen zerfällt:

$$H(u, v)=L(u)\, M(v),$$

wo $L(u)$ symbolisch eine lineare Function von $u_1, \dots u_n$, und $M(v)$ eine solche von $v_1, \dots v_n$ bezeichnet, so ist

$$H\left(u^{(\nu)}, v\right)=L\left(u^{(\nu)}\right)M(v),\ H\left(u, v^{(\nu)}\right)=L(u)\,M\left(v^{(\nu)}\right),\ H\left(u^{(\nu)}, v^{(\nu)}\right)=L\left(u^{(\nu)}\right)M\left(v^{(\nu)}\right).$$

Aus diesen Gleichungen (oder kürzer daraus, dass die linke Seite von (3.) eine lineare Verbindung der Unterdeterminanten zweiten Grades von H ist) ergiebt sich wieder die Relation (3.), und wir können daher den Satz aussprechen:

VI. *Wenn die Constanten* $u_\alpha^{(\varrho)}$, $v_\alpha^{(\varrho)}$ $(\varrho=1, \dots \nu+1)$ *so gewählt sind, dass die* $\nu+1$ *Determinanten* w_ϱ *durch möglichst niedrige Potenzen von* $r-c$ *theilbar sind, und wenn die Exponenten der Potenzen von* $r-c$, *durch welche* $w_{\nu-1}$, w_ν, $w_{\nu+1}$ *theilbar sind, mit* $l_{\nu-1}$, $l_{\nu-1}-e_\nu$, $l_{\nu-1}-e_\nu-e_{\nu+1}$ *bezeichnet werden, so ist* $e_\nu > e_{\nu+1}$ *oder* $e_\nu=e_{\nu+1}$, *je nachdem die bilineare*

Form, welche den Coefficienten des Anfangsgliedes in der Entwickelung von $W_{\nu-1}$ *nach aufsteigenden Potenzen von* $r-c$ *bildet, in das Product zweier Linearformen zerfällt oder nicht.*

Ein Corollar dieses Satzes ist das oben erhaltene Resultat. Denn wenn die Form H eine alternirende ist, so kann sie, da sie nicht identisch verschwindet, nicht das Product zweier Linearformen sein.

Uebrigens ist der Satz VI nur ein specieller Fall des folgenden allgemeineren Theorems, das wir hier nicht beweisen wollen, da wir von demselben keinen Gebrauch zu machen haben (vgl. die folgende Abhandlung des Herrn *Frobenius* §. 3):

VII. *Wenn die Constanten* $u_\alpha^{(\varrho)}$, $v_\alpha^{(\varrho)}$ $(\varrho=1,\dots \nu-1)$ *so gewählt sind, dass die Determinanten* w_ϱ *durch möglichst niedrige Potenzen von* $r-c$ *theilbar sind, wenn ferner der Exponent derjenigen Potenz von* $r-c$, *durch welche* w_ϱ *theilbar ist, mit* l_ϱ *bezeichnet und* $l_{\varrho-1}-l_\varrho=e_\varrho$ *gesetzt wird, und wenn dann der Rang der bilinearen Form* H, *welche den Coefficienten des Anfangsgliedes in der Entwickelung von* $W_{\nu-1}$ *nach aufsteigenden Potenzen von* $r-c$ *bildet, gleich* $\varkappa$ *ist, so ist*

$$e_\nu = e_{\nu+1} = \cdots = e_{\nu+\varkappa-1} > e_{\nu+\varkappa}.$$

In der Formenschaar $rA-B$, deren Determinante nicht identisch verschwindet, sei B eine alternirende Form von verschwindender Determinante, A eine symmetrische Form. Dann ist $c=0$ eine Wurzel der Gleichung $w=0$. Derselben mögen die Elementartheiler r^{e_1}, r^{e_2}, ... entsprechen. In der Determinante $w_{\nu-1}$ seien die Constanten $u_\alpha^{(\varrho)}$, $v_\alpha^{(\varrho)}$ $(\varrho=1,\dots \nu-1)$ so gewählt, wie es oben auseinandergesetzt ist, also entweder $u_\alpha^{(\varrho)}=v_\alpha^{(\varrho)}$ oder $u_\alpha^{(\varrho)}=v_\alpha^{(\varrho+1)}$, $v_\alpha^{(\varrho)}=u_\alpha^{(\varrho+1)}$ $(\alpha=1,\dots n)$. Dann geht die Determinante $w_{\nu-1}$, wenn man r durch $-r$ ersetzt, in sich selbst über, multiplicirt mit $(-1)^{n-\nu+1}$, wie man durch Umstellung der Zeilen und Colonnen erkennt. Auf dieselbe Weise findet man, dass die Form $\frac{W_{\nu-1}}{w_{\nu-1}}$, wenn man r mit $-r$ und u_α mit v_α $(\alpha=1,\dots n)$ vertauscht, nur das Zeichen wechselt. Fängt die Entwickelung dieser Form nach aufsteigenden Potenzen von r mit Hr^{-e_ν} an, so ist daher H eine symmetrische oder

alternirende Form, je nachdem e_ν ungerade oder gerade ist. Da sich diese Form H von der oben mit demselben Buchstaben bezeichneten nur durch einen constanten Factor unterscheidet, so erkennt man, dass, falls H alternirend, also e_ν gerade ist, $e_\nu = e_{\nu+1}$ sein muss. Die für $r = 0$ verschwindenden Elementartheiler, welche einen geraden Exponenten haben, müssen also immer paarweise auftreten.

Ist $A+B=A'$, $A-B=B'$, so ist B' die conjugirte Form von A' (entsteht aus A' durch Vertauschung von x_α mit y_α). In der Determinante der Formenschaar $r'A'-B'$ müssen also die für $r'=1$ verschwindenden Elementartheiler paaren Grades immer doppelt vorhanden sein.

In ganz ähnlicher Weise (indem man nämlich für A eine alternirende und für B eine symmetrische Form nimmt) erkennt man, dass in der Formenschaar $r'A'-B'$ mit conjugirten Grundformen die für $r' = -1$ verschwindenden Elementartheiler unpaaren Grades immer doppelt auftreten müssen. Damit ist wenigstens für Schaaren mit nicht identisch verschwindender Determinante ein neuer Beweis für den Satz des Herrn *Kronecker* (Berl. Monatsber. 1874, April, § 3, IV) gewonnen:

Sind A und B conjugirte bilineare Formen, so sind in der Determinante der Schaar $rA-B$ die für $r = 1$ verschwindenden Elementartheiler mit geradem und die für $r = -1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten immer paarweise vorhanden.

Zum Schlusse erwähnen wir noch, dass sich auch der folgende Satz, welchen Herr *Frobenius* dieses Journal Bd. 84, S. 41 abgeleitet hat, mit Hülfe der oben entwickelten Principien leicht beweisen lässt:

Sind $p_{\alpha\beta}$ und $q_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots n)$ die Coefficienten zweier linearen Substitutionen, welche beide eine bestimmte quadratische [alternirende bilineare] Form von nicht verschwindender Determinante in die nämliche zweite Form transformiren, so sind die Elementartheiler der Determinante $|rp_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta}|$, welche für den Werth $r = +1$ oder $r = -1$ verschwinden und einen geraden [ungeraden] Exponenten haben, stets paarweise vorhanden.

Zürich, im Februar 1878.

Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Zwei bilineare Formen $A=\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ und $B=\Sigma b_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ heissen *congruent*, wenn A durch cogrediente lineare Substitutionen von nicht verschwindender Determinante in B transformirt werden kann. Da die nämlichen Substitutionen auch die Form $A'=\Sigma a_{\beta\alpha}x_\alpha y_\beta$, welche die *conjugirte* Form von A genannt wird, in die conjugirte Form B' von B überführen, so verwandeln sie auch die Schaar bilinearer Formen $rA-A'$ in die Schaar $rB-B'$ (*Kronecker*, d. J. Bd. 68, S. 276). Bezeichnet man also die Substitutionsdeterminante mit p und allgemein die Determinante einer bilinearen Form G mit $|G|$, so ist

$$(1.)\qquad |rB-B'| = |rA-A'|\,p^2.$$

Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ identisch (für jeden Werth des Parameters r) Null ist, so ergiebt sich hieraus kein bestimmter Werth von p. Verschwindet sie aber nicht, so folgt daraus die Gleichung

$$(2.)\qquad p^2=|rB-B'|:|rA-A'|.$$

Folglich muss die rechte Seite dieser Formel von r unabhängig sein, und für alle die unzählig vielen Substitutionen, welche A in B transformiren, muss das Quadrat der Determinante den nämlichen Werth haben. Nun sind zwei Fälle möglich: Die Determinante p kann für alle jene Substitutionen entweder einen und denselben Werth haben, oder bald den einen, bald den andern von zwei entgegengesetzten Werthen. Ich stelle mir daher hier die Aufgabe, zu entscheiden, wann der erste und wann der zweite dieser beiden Fälle eintritt, und ferner im ersten Falle das Vorzeichen des Transformationsmoduls p zu ermitteln, ohne eine Substitution aufzusuchen, die A in B verwandelt.

Ebenso wie bei zwei congruenten bilinearen Formen, kann man auch bei zwei äquivalenten Schaaren quadratischer Formen nach dem Werthe der Substitutionsdeterminante fragen. Denn wird eine solche Formenschaar $rA-B=\Sigma(ra_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})\,x_\alpha\,x_\beta$, wo $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$ und $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$ ist, durch eine lineare Substitution in eine andere transformirt, so gilt auch hier der Satz, dass die Determinante der transformirten Schaar gleich derjenigen der ursprünglichen Schaar ist, multiplicirt mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante. Die Beantwortung dieser Frage erfordert ganz andere Hülfsmittel, wie die der oben aufgeworfenen. Während sich die Lösung der ersten Aufgabe im Wesentlichen auf den Satz stützt, dass eine schiefe Determinante von paarem Grade das Quadrat einer ganzen rationalen Function ihrer Elemente ist, beruht die Lösung der zweiten, die weit tiefer liegt, auf der Duplication einer gewissen in lineare Factoren zerlegbaren Form $n$ten Grades von n Variabeln, welche eine Contravariante der Schaar quadratischer Formen ist.

Ich citire im Folgenden die Abhandlung des Herrn *Kronecker* „*Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen*", Berl. Mon. 1874, April, mit *Kr.*, die vorangehende Abhandlung des Herrn *Stickelberger* „*Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen*" mit *St.* und meine Abhandlung „*Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*", d. J. 84, mit *Fr.*

§. 1.

Die Determinante der Transformation einer Form in sich selbst.

Alle Substitutionen, welche eine bilineare Form A mit cogredienten Variabeln in eine andere B überführen, werden erhalten, indem man mit einer derselben alle Substitutionen zusammensetzt, welche A in sich selbst transformiren. Die Moduln aller Transformationen von A in B haben daher einen und denselben oder zwei entgegengesetzte Werthe, je nachdem alle Substitutionen, welche A in sich selbst verwandeln, die Determinante $+1$ haben (*eigentliche* sind) oder zum Theil die Determinante -1 haben (*uneigentliche* sind).

Wird eine bilineare Form durch eine gewisse Substitution in sich selbst transformirt, so wird jede congruente Form durch eine *ähnliche* Substitution in sich selbst verwandelt (*Fr.* §. 9, II.). Da nun ähnliche Substitutionen gleiche Determinanten haben, so kann man bei der Ermittelung der Determinante der Substitutionen, welche eine Form in sich selbst überführen, die gegebene Form durch irgend eine congruente ersetzen.

1) Wenn die Determinante der Schaar $rA - A'$ identisch verschwindet, so ist A einer *zerlegbaren* (*Fr.*, §. 5) Form $A_1 + A_2$ congruent, wo

$$A_1 = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_{m-1} y_m$$

ist und A_2 nur die Variabeln x_ν, y_ν $(\nu = m+1, \ldots n)$ enthält, und wo m eine ungerade Zahl ist (*Kr.*, §. 3, IV, 1). Letztere Form geht nun in sich selbst über, wenn man

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \ldots x_m; \; x_{m+1}, \ldots x_n$$

der Reihe nach durch

$$px_1, \; \frac{1}{p} x_2, \; px_3, \; \frac{1}{p} x_4, \ldots px_m; \; x_{m+1}, \ldots x_n$$

ersetzt (und auf $y_1, y_2, \ldots y_n$ die cogrediente Substitution anwendet). Der Modul dieser Transformation ist, weil m ungerade ist, gleich p.

I. *Wenn die Determinante der Schaar $rA - A'$ mit conjugirten Grundformen identisch verschwindet, so kann die Form A durch eine Substitution in sich selbst transformirt werden, deren Determinante einen beliebig vorgeschriebenen von Null verschiedenen Werth hat*).*

2) Wenn die Determinante der Schaar $rA - A'$ einen Elementartheiler $(r-1)^m$ hat, wo m eine ungerade Zahl ist, so ist A einer zerlegbaren Form $A_1 + A_2$ congruent, wo A_1 nur die Variabeln x_μ, y_μ $(\mu = 1, \ldots m)$ und A_2 nur die Variabeln x_ν, y_ν $(\nu = m+1, \ldots n)$ enthält, und wo die Determinante von $rA_1 - A'_1$ nur den Elementartheiler $(r-1)^m$ hat (*Kr.* §. 3,

---

*) Besteht zwischen den Ableitungen von $rA - A'$ nach $y_1, \ldots y_n$ eine lineare Relation mit constanten (von r unabhängigen) Coefficienten, so kann auch $p = 0$ sein, in allen andern Fällen aber muss p nothwendig von Null verschieden sein (Vgl. *Kr.* §. 3, III).

IV, 2). Diese Form geht in sich selbst über, wenn man die Variabeln x_μ durch $-x_\mu$ ersetzt und die Variabeln x_ν ungeändert lässt. Der Modul dieser Transformation ist $(-1)^m = -1$.

II. *Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, so lässt die Form A uneigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

3) Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ den Elementartheiler $(r-a)^\alpha$ hat, und a nicht gleich ± 1 ist, so hat sie auch den Elementartheiler $(r-\frac{1}{a})^\alpha$. (Für $a=0$ muss die Determinante von $uA+vA'$, wenn sie den Elementartheiler u^α hat, auch den Elementartheiler v^α besitzen.) Ferner sind die Elementartheiler, welche für $r=-1$ verschwinden und einen ungeraden Exponenten haben, stets paarweise vorhanden. (*Kr.*, §. 3., IV., 3.) Ist daher F eine der elementaren Formen, in welche die Reducirte von A zerlegbar ist, so kann die Anzahl der Variabelnpaare von F nur dann ungerade sein, wenn die Determinante von $rF-F'$ identisch oder für $r=1$ verschwindet.

Ich nehme nun an, dass die Determinante der Schaar $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat. Die Anzahl n der Variabelnpaare von A, welche der Summe der Exponenten aller Elementartheiler von $|rA-A'|$ gleich ist, muss dann eine gerade Zahl sein, und wird A irgendwie in eine zerlegbare Form A_1+A_2 transformirt, so muss auch die Anzahl der Variabelnpaare von A_1 gerade sein. Denn die Elementartheiler von $|rA-A'|$ sind die von $|rA_1-A'_1|$ und $|rA_2-A'_2|$ zusammengenommen. (Vgl. *St.* §. 2.)

Sei nun P eine Substitution, welche A in sich selbst transformirt (der Buchstabe P repräsentirt das System der n^2 Substitutionscoefficienten $p_{\alpha\beta}$), und sei die *charakteristische Function* von P (*Fr.*, §. 3, 1) gleich $\varphi(r) = \varphi_1(r)\varphi_2(r)$, wo $\varphi_1(r) = (r+1)^m$ ist und $\varphi_2(r)$ für $r=-1$ nicht verschwindet (m kann auch Null sein). Dann ist P einer zerlegbaren Substitution $P_0 = P_1 + P_2$ ähnlich, wo P_1 und P_2 bezüglich die charakteristischen Functionen $\varphi_1(r)$ und $\varphi_2(r)$ haben. Da die Form A durch die Substitution P in sich selbst übergeht, so giebt es eine mit A congruente Form A_0,

welche durch die ähnliche Substitution P_0 in sich selbst transformirt wird (*Fr.*, §. 9, II.). Weil aber die charakteristische Function $\varphi_1(r)$ von P_1 nur für $r=-1$ verschwindet und die von P_2 für den reciproken Werth von -1 nicht Null ist, so muss die Form A_0 in der nämlichen Weise, wie die Substitution P_0 in zwei Theile A_1+A_2 zerfallen, deren erster m Variabelnpaare enthält und durch P_1 in sich selbst transformirt wird, während der andere die übrigen $n-m$ Variabelnpaare enthält und durch P_2 in sich selbst transformirt wird (*Fr.*, §. 9, VI; §. 8, IX.). Nach den obigen Erörterungen muss daher die Anzahl m der Variabelnpaare von A_1 eine gerade sein. Nun ist aber (*Fr.*, §. 9, (3.)), wenn -1 eine m-fache Wurzel der Gleichung $\varphi(r)=0$ ist, die Determinante p von P gleich $(-1)^m$. Folglich muss $p=+1$ sein.

III. *Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, so lässt die Form A nur eigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes sei B eine mit A congruente Form. Dann ist die Determinante einer Substitution P, die A in B transformirt,

$$p=\sqrt{(|rB-B'|:|rA-A'|)}, \tag{1.}$$

und zufolge des eben bewiesenen Satzes muss die Quadratwurzel stets denselben Werth haben, welche der unzählig vielen Substitutionen, die A in B verwandeln, auch für P gewählt werden mag. Diesen Werth der Quadratwurzel kann man finden, ohne dass man nöthig hätte, eine der Substitutionen P zu ermitteln. Ich werde nämlich eine von Null verschiedene rationale Function a der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ angeben, welche mit der aus den Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ analog gebildeten Function b durch die Relation

$$b=ap \tag{2.}$$

verbunden ist. Diesen Ausdruck a nenne ich die *schiefe Invariante* der Form A.

Durch analoge Betrachtungen, wie oben über Schaaren bilinearer Formen mit conjugirten Grundformen angestellt worden sind, ergeben sich über Schaaren quadratischer Formen die Sätze:

IV. *Wenn die Determinante einer Schaar quadratischer Formen identisch verschwindet, so kann die Schaar durch eine Substitution in sich selbst transformirt werden, deren Determinante einen beliebig vorgeschriebenen von Null verschiedenen Werth hat.*

Besteht zwischen den Ableitungen der Formenschaar eine lineare Relation mit constanten Coefficienten, so kann der Transformationsmodul auch Null sein, sonst aber muss er von Null verschieden sein.

V. *Wenn die Determinante einer Schaar quadratischer Formen einen Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, so lässt die Schaar uneigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

VI. *Wenn die Determinante einer Schaar quadratischer Formen nicht identisch Null ist, und wenn alle ihre Elementartheiler gerade Exponenten haben, so lässt die Schaar nur eigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

§. 2.

Ermittelung der schiefen Invariante einer bilinearen Form in zwei speciellen Fällen.

Eine bilineare Form A, für welche die Determinante der Schaar $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, möge durch eine willkürliche Substitution P von nicht verschwindender Determinante p in die Form B übergehen. Kann man dann aus den Coefficienten von A einen von Null verschiedenen rationalen Ausdruck a bilden, der mit dem aus den Coefficienten von B analog gebildeten Ausdrucke b durch die Gleichung $b^2=a^2p^2$ verbunden ist, so muss nothwendig $b=+ap$ sein. Denn legt man den Veränderlichen $p_{\alpha\beta}$ die Werthe 0 oder 1 bei, je nachdem α von β verschieden oder gleich β ist, so ist $p=1$ und $b_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$, also $b=+ap$. Ferner kann die rationale Function $\frac{b}{ap}$ der n^2 Variabeln $p_{\alpha\beta}$, welche nur der Beschränkung unterworfen sind, eine von Null verschiedene Determinante p zu bilden, nach der Voraussetzung nur gleich $+1$ oder -1 sein, und weil sie sich stetig ändert, von dem Anfangswerthe $+1$ niemals zu dem Werthe -1 überspringen. (Vgl. *Stickelberger* „*Ueber reelle*

orthogonale Substitutionen", §. 4; Programm der eidgenössischen polyt. Schule, 1877.)

In dem einfachsten Falle, wo die Determinante von $rA-A'$ für $r=1$ nicht verschwindet, folgt aus der Gleichung (1.) der Einleitung, indem man $r=1$ setzt,

$$|B-B'| = |A-A'|p^2.$$

Nun ist aber die von Null verschiedene schiefe Determinante $|A-A'|$ das Quadrat einer ganzen Function a der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$, der *Pfaff*schen Function*) der Grössen $a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}$, und die Determinante $|B-B'|$ ist das Quadrat der *Pfaff*schen Function b der Grössen $b_{\alpha\beta}-b_{\beta\alpha}$. Der vorausgeschickten Bemerkung zufolge ist daher $b=ap$, also a eine schiefe Invariante der Form A**).

Verschwindet aber die Determinante der Schaar $rA-A'$ für $r=1$, so werde ich zeigen, dass das Anfangsglied der Entwickelung von $|rA-A'|$ nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ das Quadrat einer rationalen, und zwar gebrochenen, Function a der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ ist, oder genauer ausgedrückt, dass sich eine rationale Function der veränderlichen Grössen $a_{\alpha\beta}$ angeben lässt, deren Quadrat gleich jenem Anfangsgliede wird, falls diese Variabeln solchen Beschränkungen unterworfen werden, dass die Determinante von $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat.

Um die eigenthümliche Form, in welcher sich die schiefe Invariante a unter der gemachten Voraussetzung darstellt, deutlicher zur Anschauung zu bringen, schicke ich der allgemeinen Untersuchung die Betrachtung des speciellen Falls voraus, wo die für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler von $|rA-A'|$ alle denselben (geraden) Exponenten e haben. Sei also diese

---

*) Unter der *Pfaff*schen Function von $\frac{n(n-1)}{2}$ Variabeln $t_{\alpha\beta}=-t_{\beta\alpha}$, ($t_{\alpha\alpha}=0$), wo n gerade ist, wird hier immer ein bestimmter Werth der Quadratwurzel aus der Determinante $|t_{\alpha\beta}|$ verstanden, nämlich der, in welchem das Glied $t_{12}\,t_{34}\ldots t_{n-1,n}$ den Coefficienten $+1$ hat.

**) Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass eine alternirende Form, falls ihre Determinante nicht Null ist, nur eigentliche Transformationen in sich selbst zulässt. Verschwindet aber ihre Determinante, so kann der Modul einer Transformation der Form in sich selbst jeden beliebigen Werth (auch Null) haben. (Vgl. *Fr.* §. 10, IV.)

Determinante genau durch die emte Potenz von $r-1$ theilbar, der grösste gemeinsame Divisor ihrer ersten Unterdeterminanten durch die $e(m-1)$te, der ihrer zweiten Unterdeterminanten durch die $e(m-2)$te, u. s. w., der ihrer $(m-1)$ten Unterdeterminanten durch die $e$te Potenz, während ihre $m$ten Unterdeterminanten nicht mehr alle für $r=1$ verschwinden. Der Rang $n-m$ einer schiefen Determinante $|A-A'|$ ist stets eine gerade Zahl, und unter den von Null verschiedenen Unterdeterminanten $(n-m)$ten Grades befinden sich auch Hauptunterdeterminanten (d. J. Bd. 82, S. 242, IV.). Daraus folgt erstens, dass m gerade ist, weil nach §. 1, 3 n gerade sein muss. Zweitens aber ergiebt sich daraus, dass sich die nm Grössen

$$(1.)\qquad x_1^{(\mu)},\ x_2^{(\mu)}, \dots x_n^{(\mu)} \qquad (\mu=1,2,\dots m)$$

so wählen lassen, dass die (schiefe) Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{11} & \cdots & a_{1n}-a_{n1} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}-a_{1n} & \cdots & a_{nn}-a_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(m)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -x_1^{(m)} & \cdots & -x_n^{(m)} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = h_m = a_m^2$$

von Null verschieden ist. Denn wenn z. B. die Hauptunterdeterminante $(n-m)$ten Grades $|a_{m+\varkappa,\,m+\lambda}-a_{m+\lambda,\,m+\varkappa}|$ $(\varkappa,\lambda=1,2,\dots n-m)$ von Null verschieden ist, so braucht man nur $x_1^{(1)}=x_2^{(2)}=\cdots=x_m^{(m)}=1$ und sonst $x_\alpha^{(\mu)}=0$ zu setzen.

Sei nun $ra_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}=c_{\alpha\beta}$ und

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & y_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & y_n \\ -x_1 & \cdots & -x_n & 0 \end{vmatrix} = W, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(m)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -x_1^{(m)} & \cdots & -x_n^{(m)} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = w_m,$$

also $|c_{\alpha\beta}| = w$. Bezeichnet man den Werth, den eine bilineare Form G annimmt, wenn man den Variabeln

$$x_1, \dots x_n; \quad y_1, \dots y_n$$

die Werthe

$$x_1^{(\varkappa)}, \dots x_n^{(\varkappa)}; \quad x_1^{(\lambda)}, \dots x_n^{(\lambda)}$$

beilegt, mit $G_{\varkappa\lambda}$, so ist zufolge einer Identität, die ich §. 3 ableiten werde, die Determinante $m$ten Grades

$$(2.) \qquad |W_{\varkappa\lambda}| = w_m\, w^{m-1}.$$

Beginnen die Entwickelungen von W und w nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ mit

$$W = H(r-1)^{e(m-1)} + \cdots, \quad w = h(r-1)^{em} + \cdots,$$

so fängt die Entwickelung der rechten Seite dieser Gleichung mit

$$h_m\, h^{m-1}(r-1)^{em(m-1)}$$

an, und durch die Vergleichung der $em(m-1)$ten Potenzen auf beiden Seiten erhält man die Relation

$$(3.) \qquad |H_{\varkappa\lambda}| = h_m\, h^{m-1},$$

aus welcher folgt, dass $|H_{\varkappa\lambda}|$ von Null verschieden ist. Vertauscht man aber in der Determinante W die Variabeln $x_1, \dots x_n$ mit $y_1, \dots y_n$ und r mit $\frac{1}{r}$, so geht sie, wie man durch Umstellung der Zeilen und Colonnen erkennt, in $\frac{W}{(-r)^{n-1}}$ über, und daher ist

$$\frac{W}{(-r)^{n-1}} = H'\left(\frac{1}{r}-1\right)^{e(m-1)} + \cdots,$$

wo H' die conjugirte Form von H ist, oder weil n und e gerade sind,

$$W = -H'(r-1)^{e(m-1)}\, r^{n-1-e(m-1)} + \cdots,$$

und wenn man die rechte Seite nach Potenzen von $r-1$ entwickelt,

$$W = -H'(r-1)^{e(m-1)} + \cdots.$$

Demnach ist $H' = -H$, oder H eine alternirende Form, also $H_{\varkappa\lambda} = -H_{\lambda\varkappa}$ und $H_{\varkappa\varkappa} = 0$, und folglich ist $|H_{\varkappa\lambda}|$ das Quadrat der *Pfaff*schen Function A_m der Grössen $H_{\varkappa\lambda}$. Aus der Formel (3.) ergiebt sich daher

$$(4.) \qquad a = \sqrt{h} = h^{\frac{1}{2}m}\,\frac{a_m}{A_m}.$$

Da h der Coefficient des Anfangsgliedes von w ist, so ist dieser Gleichung zufolge $\frac{a_m}{A_m} = \sqrt{\frac{h_m}{|H_{\varkappa\lambda}|}}$ von den Variabeln (1.) unabhängig.

Wenn die Form A durch die Substitution P in B übergeht, und wenn die Grössen (1.) durch die contragrediente Substitution transformirt werden, so ist w eine Invariante und $W_{\varkappa\lambda}$ eine zugehörige Form von A, und folglich ist w_m nach Formel (2.) eine zugehörige Form mit mehreren Reihen unabhängiger Variabeln. Da diese Ausdrücke den Parameter r enthalten, so sind auch die Coefficienten ihrer Entwickelungen nach Potenzen von $r-1$ Invarianten und zugehörige Formen. Auf der rechten Seite der Gleichung (4.) ist daher $h^{\frac{1}{2}m}$ eine (ganze) Potenz einer Invariante, und a_m und A_m sind rationale zugehörige Formen, deren Quotient eine Invariante ist. Wenn man daher für die mit A congruente Form B, für welche die Determinante von $rB-B'$ in die nämlichen Elementartheiler zerfällt, wie die von $rA-A'$, die dem Ausdrucke a analoge Function b bildet, so kann man in derselben den Grössen (1.) ganz beliebige Werthe beilegen, für welche die dem Ausdrucke h_m analoge Function von Null verschieden ist, und braucht nicht die Werthe zu nehmen, welche durch die (unbekannte) contragrediente Substitution von P aus den Grössen (1.) hervorgehen. Da w, also auch h bei der Transformation von A in B mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante multiplicirt wird, so ist $b^2 = a^2p^2$ und folglich

$$(5.) \qquad p = \frac{b}{a}.$$

§. 3.

Sylvester's Determinantensatz.

Wird in der Determinante w der n^2 Grössen $c_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $c_{\beta\alpha}$ mit $w_{\alpha\beta}$ bezeichnet, so ergeben sich, indem man die n linearen Gleichungen

$$w_{\alpha 1}y_1 + w_{\alpha 2}y_2 + \cdots + w_{\alpha n}y_n = Y_\alpha$$

auflöst, die Gleichungen

$$c_{\alpha 1} Y_1 + c_{\alpha 2} Y_2 + \cdots + c_{\alpha n} Y_n = w y_\alpha .$$

Sind also $z_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots m)$ willkürliche Grössen und setzt man

$$X_\alpha^{(\varkappa)} = w_{1\alpha} x_1^{(\varkappa)} + w_{2\alpha} x_2^{(\varkappa)} + \cdots + w_{n\alpha} x_n^{(\varkappa)},$$

$$Y_\alpha^{(\varkappa)} = w_{\alpha 1} y_1^{(\varkappa)} + w_{\alpha 2} y_2^{(\varkappa)} + \cdots + w_{\alpha n} y_n^{(\varkappa)},$$

$$W_{\varkappa\lambda} = z_{\varkappa\lambda} w - \sum_{\alpha,\beta} w_{\alpha\beta} x_\alpha^{(\varkappa)} y_\beta^{(\lambda)} = z_{\varkappa\lambda} w - \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha^{(\varkappa)} Y_\beta^{(\lambda)},$$

so erhält man durch Zusammensetzung der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & y_n^{(1)} & \cdots & y_n^{(m)} \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{(m)} & \cdots & x_n^{(m)} & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = w_m, \quad \begin{vmatrix} w_{11} & \cdot\cdot & w_{1n} & Y_1^{(1)} & \cdot\cdot & Y_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ w_{n1} & \cdot\cdot & w_{nn} & Y_n^{(1)} & \cdot\cdot & Y_n^{(m)} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & -w & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & -w \end{vmatrix} = (-1)^m w^{n-1+m}$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} w & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & w & 0 & \cdots & 0 \\ X_1^{(1)} & \cdots & X_n^{(1)} & -W_{11} & \cdots & -W_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_1^{(m)} & \cdots & X_n^{(m)} & -W_{m1} & \cdots & -W_{mm} \end{vmatrix} = (-1)^m w^n |W_{\varkappa\lambda}|,$$

und daher ist

$$|W_{\varkappa\lambda}| = w^{m-1} w_m .$$

Diese Formel, welche in vielen Untersuchungen über die Beziehungen zwischen Unterdeterminanten die wichtigsten Dienste leistet, ist von Herrn *Sylvester*, Phil. Mag. 1851, April, gefunden worden. (Vgl. auch *Kronecker*, d. J. Bd. 72, S. 152.)

§. 4.

Allgemeine Darstellung der schiefen Invariante einer bilinearen Form.

Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ nicht identisch verschwindet, und wenn der Factor $r-1$ in derselben genau in der $l$ten Potenz enthalten ist, in dem grössten gemeinsamen Divisor ihrer ersten, zweiten, ... $(m-1)$ten Unterdeterminanten bezüglich genau in der $l_1$ten, $l_2$ten, ... l_{m-1}ten Potenz, während ihre $m$ten Unterdeterminanten nicht alle für $r=1$ verschwinden, so setze ich voraus, dass die Zahlen

$$l-l_1=e_1, \quad l_1-l_2=e_2, \dots \quad l_{m-1}=e_m$$

gerade sind, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Zahlen l_μ sämmtlich gerade sind. Da die Elementartheiler von $|rA-A'|$, welche für $r=1$ verschwinden und einen geraden Exponenten haben, paarweise vorhanden sind (*Kr.*, §. 3, IV, 2), so ist

$$e_1=e_2 \geqq e_3=e_4 \geqq e_5 \dots \geqq e_{m-1}=e_m,$$

also m eine gerade Zahl.

Sei nun $ra_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}=c_{\alpha\beta}$, und sei

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(\mu)} & y_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(\mu)} & y_n \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -x_1^{(\mu)} & \cdots & -x_n^{(\mu)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x_1 & \cdots & -x_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = W^{(\mu)}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(\mu)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(\mu)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -x_1^{(\mu)} & \cdots & -x_n^{(\mu)} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = w_\mu,$$

und seien $H^{(\mu)}$ und h_μ die Coefficienten der Anfangsglieder in den Entwickelungen von $W^{(\mu)}$ und w_μ nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$. Endlich möge der Werth, den eine bilineare Form G annimmt, wenn man den Variabeln

$$x_1, \dots x_n; \quad y_1, \dots y_n$$

die Werthe

$$x_1^{(\varkappa)}, \dots x_n^{(\varkappa)}; \quad x_1^{(\lambda)}, \dots x_n^{(\lambda)}$$

beilegt, mit $G_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet werden.

Nun ergiebt sich, wie in §. 2, dass der Coefficient H des Anfangsgliedes der Entwickelung von W nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ eine alternirende Form ist, dass also $H_{12} = -H_{21}$ und $H_{11} = H_{22} = 0$ ist. Wählt man ferner, was immer möglich ist, die Grössen

$$x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)}; \quad x_1^{(2)}, \dots x_n^{(2)}$$

so, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & x_1^{(2)} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & x_n^{(2)} \\ -x_1^{(1)} & \dots & -x_n^{(1)} & 0 \end{vmatrix} = W_{12}$$

nicht durch eine höhere Potenz von $r-1$ als die $l_1$te theilbar ist, so ist H_{12} von Null verschieden. Wenn man daher in der bekannten Relation

$$(1.) \qquad W_{11}\,W_{22} - W_{12}\,W_{21} = w\,w_2$$

die linke Seite nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ entwickelt, so ist

$$(H_{11}\,H_{22} - H_{12}\,H_{21})\,(r-1)^{2l_1} = (H_{12})^2 (r-1)^{2l_1}$$

das wirkliche (von Null verschiedene) Anfangsglied. Da w genau durch die $l$te Potenz von $r-1$ theilbar ist, so ist der Exponent der Potenz von $r-1$, durch welche w_2 theilbar ist, der Gleichung (1.) zufolge genau gleich $2\,l_1 - l$, oder weil $l - l_1 = l_1 - l_2$ ist, gleich l_2, und aus der Formel

$$(H_{12})^2 = h\,h_2\,,$$

die sich durch Coefficientenvergleichung aus (1.) ergiebt, folgt, dass h ein Quadrat ist, falls h_2 ein solches ist.

Auf h_2 lassen sich nun die nämlichen Schlüsse anwenden, wie auf h. Die Grössen

$$x_1^{(3)}, \dots x_n^{(3)}; \quad x_1^{(4)}, \dots x_n^{(4)}$$

können so gewählt werden, dass die Determinante

$$-\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & x_1^{(2)} & x_1^{(1)} & x_1^{(4)} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & x_n^{(2)} & x_n^{(1)} & x_n^{(4)} \\ -x_1^{(1)} & \dots & -x_n^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -x_1^{(2)} & \dots & -x_n^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -x_1^{(3)} & \dots & -x_n^{(3)} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = W_{34}^{(2)}$$

nicht durch eine höhere Potenz von $r-1$ als die $l_3$te theilbar ist. Denn unterdrückt man die beiden letzten Zeilen und Colonnen, so erhält man eine Determinante W_{12}, die den Factor $r-1$ genau in der $l_1$ten Potenz enthält; lässt man aber nur die letzte Zeile und Colonne weg, so ist die erhaltene Unterdeterminante, w_3, wie oben gezeigt, genau durch die $l_2$te Potenz von $r-1$ theilbar. Folglich ergiebt sich die Behauptung aus dem Satze *St.*, §. 2, III. Alle weiteren Schlüsse bleiben dieselben und mithin ist

$$(H_{34}^{(2)})^2 = h_2 h_4,$$

also h_4 ein Quadrat, falls h_2 es ist. Ebenso ist

$$(H_{56}^{(4)})^2 = h_4 h_6, \dots (H_{m-1,m}^{(m-2)})^2 = h_{m-2} h_m.$$

Da w_m für $r=1$ nicht verschwindet, so wird h_m durch die nämliche Determinante, wie in §. 2 dargestellt, ist also das Quadrat einer *Pfaff*schen Function. Daher ist h das Quadrat eines aus rationalen Contravarianten rational zusammengesetzten Ausdrucks a, welcher von den Variabeln $x_\alpha^{(\mu)}$ unabhängig, also eine Invariante ist, weil h der Coefficient des Anfangsgliedes in der Entwicklung von w nach Potenzen von $r-1$ ist.

Aehnlich wie in §. 2 lässt sich auch hier die Berechnung der schiefen Invariante a dadurch vereinfachen, dass man nicht von h zu h_2, von da zu h_4 u. s. w. übergeht, sondern, falls

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_\alpha > e_{\alpha+1} = e_{\alpha+2} = \cdots = e_\beta > e_{\beta+1} = \cdots$$

ist, gleich von h zu h_α, von da zu h_β u. s. w. Indem wir somit die Existenz einer schiefen Invariante unter den gemachten Voraussetzungen allgemein dargethan haben, sind wir zugleich zu einem neuen Beweise für den Satz III. §. 1 gelangt. Das erhaltene Resultat kann als eine Verallgemeinerung des *Cayley*schen Satzes, dass jede schiefe Determinante von paarem Grade das Quadrat einer rationalen Function ihrer Elemente ist, aufgefasst und in einer etwas veränderten Form folgendermassen ausgesprochen werden:

Ist $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$, $t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha}$, $t_{\alpha\alpha} = 0$, ist die Determinante $|r\, s_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}|$ nicht identisch Null, und haben ihre für $r=0$ verschwindenden Elementartheiler alle einen geraden Exponenten, so ist in der Entwicklung dieser Determinante nach aufsteigenden Potenzen von r der Coefficient des Anfangsgliedes das Quadrat einer rationalen Function der Grössen $s_{\alpha\beta}$ und $t_{\alpha\beta}$.

Ist speciell $s_{\alpha\beta}=0$, falls α von β verschieden ist, und $s_{\alpha\alpha}$ für einige Werthe von α gleich 1, für andere 0, so ist jenes Anfangsglied eine Summe von Hauptunterdeterminanten paaren Grades des Systems $t_{\alpha\beta}$, also eine Summe von Quadraten ganzer Functionen, und diese Summe von Quadraten lässt sich unter den obigen Voraussetzungen als das Quadrat einer einzigen gebrochenen rationalen Function der Grössen $t_{\alpha\beta}$ darstellen.

§. 5.

Ueber die zerlegbare Contravariante $n$ten Grades einer Schaar bilinearer Formen von $2n$ Variabeln.

Die schiefe Invariante einer Schaar quadratischer Formen, deren Determinante nicht identisch verschwindet und lauter Elementartheiler mit geraden Exponenten hat, ergiebt sich aus einer Formel der Lehre von der Composition der in lineare Factoren zerlegbaren Formen $n$ten Grades von n Variabeln. Diese Formel will ich ganz allgemein für eine Schaar von bilinearen Formen

$$C = rA - B = \Sigma\, c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = \Sigma\,(r a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, x_\alpha\, y_\beta$$

entwickeln, über welche ich nur die Voraussetzung mache, dass die Determinante a der Form A von Null verschieden ist. Ich setze

$$W_\nu = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & y_1^{(1)} \dots y_1^{(\nu)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & y_n^{(1)} \dots y_n^{(\nu)} & y_n \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(\nu)} & \dots & x_n^{(\nu)} & 0 \dots 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \dots 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad w_\nu = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & y_1^{(1)} \dots y_1^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & y_n^{(1)} \dots y_n^{(\nu)} \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(\nu)} & \dots & x_n^{(\nu)} & 0 \dots 0 \end{vmatrix},$$

wo die Grössen $x_\alpha^{(\varrho)}$, $y_\alpha^{(\varrho)}$ ($\alpha = 1, \dots n$; $\varrho = 1, \dots \nu$) so gewählt seien, dass w_ν genau durch die $l_\nu$te Potenz von $r-c$ theilbar ist, falls $r-c$ ein $l_\nu$facher Lineartheiler aller νten Unterdeterminanten von w ist. (*St.* §. 2.)

Ist $l_{\nu-1}-l_\nu=e_\nu$ und folglich $l=e_1+e_2+\cdots$, so sei, nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ entwickelt,

$$\frac{W}{w}=\frac{Z_1}{(r-c)^{e_1}}+\frac{Z_2}{(r-c)^{e_1-1}}+\cdots+\frac{Z_{e_1}}{r-c}+T_0+T_1(r-c)+\cdots,$$

$$\frac{W_1}{w_1}=\frac{Z_{e_1+1}}{(r-c)^{e_2}}+\frac{Z_{e_1+2}}{(r-c)^{e_2-1}}+\cdots+\frac{Z_{e_1+e_2}}{r-c}+\cdots,$$

. . . .

seien also $Z_1, Z_2, \dots Z_l$ (und zwar in irgend einer Reihenfolge) die Coefficienten aller negativen Potenzen in den Entwicklungen der Quotienten $\frac{W_\nu}{w_\nu}$ $(\nu=1,2,\dots)$ nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$. Ferner sei H_ν der Coefficient des Anfangsgliedes, also der $-e_\nu$ten Potenz von $r-c$, in der Entwicklung der Differenz $\frac{W_\nu}{w_\nu}-\frac{W_{\nu-1}}{w_{\nu-1}}$.

Ist ferner c' eine von c verschiedene l'fache Wurzel der Gleichung $w=0$, so mögen die (den Grössen $x_\alpha^{(\nu)}$, $y_\alpha^{(\nu)}$ analogen) Grössen $x_\alpha^{(\nu)\prime}$, $y_\alpha^{(\nu)\prime}$ so gewählt werden, dass die (der Determinante w_ν entsprechende) Determinante w'_ν nicht durch eine höhere Potenz von $r-c'$ theilbar ist, als alle νten Unterdeterminanten von w, und es mögen die Coefficienten der negativen Potenzen von $r-c'$ in den Entwicklungen der Ausdrücke $\frac{W'_\nu}{w'_\nu}$ mit $Z_{l+1}, Z_{l+2}, \dots Z_{l+l'}$ bezeichnet werden, und die Coefficienten der Anfangsglieder der Differenzen $\frac{W'_\nu}{w'_\nu}-\frac{W'_{\nu-1}}{w'_{\nu-1}}$ mit H'_ν, u. s. w. Auf diese Weise erhält man $l+l'+l''+\cdots=n$ bilineare Formen $Z_1, Z_2, \dots Z_n$ der Variabeln x_α, y_α, die Coefficienten der negativen Potenzen von $r-c$, $r-c'$, $r-c''$, ... in den Entwicklungen der Formen

$$\frac{W_\nu}{w_\nu},\ \frac{W'_\nu}{w'_\nu},\ \frac{W''_\nu}{w''_\nu},\dots \qquad (\nu=1,2,\dots)$$

nach aufsteigenden Potenzen, und ferner ein System von Formen $H_1, H_2, \dots$, $H'_1, H'_2, \dots$, deren jede einem der Elementartheiler $(r-c)^{e_1}$, $(r-c)^{e_2}, \dots$ $(r-c')^{e'_1}$, $(r-c')^{e'_2}, \dots$ der Determinante w zugeordnet ist.

Zwischen diesen Formen werde ich die Beziehung herleiten

$$(1.)\qquad a\left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\beta}\right|\left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right| = (-1)^{\Sigma \frac{1}{2}e(e-1)}\,\Pi(H^e),$$

wo in dem Producte jede Form H den nämlichen Exponenten e hat, wie der entsprechende Elementartheiler von w. (Vgl. *Hermite*, d. J. Bd. 47, S. 314 und *Hesse*, d. J. Bd. 57, S. 178.) Ich bemerke, dass die linke Seite dieser Formel ungeändert bleibt, wenn die Formen $Z_1, Z_2, \dots Z_n$ unter einander vertauscht werden, oder wenn einer derselben das entgegengesetzte Zeichen ertheilt wird, oder allgemeiner, wenn Z_α durch $k_{\alpha 1} Z_1 + \cdots + k_{\alpha n} Z_n$ ersetzt wird und die Determinante der constanten Grössen $k_{\alpha\beta}$ gleich ± 1 ist.

§. 6.

Ueber einen speciellen Fall des aufgestellten Satzes.

Dem allgemeinen Beweise der Formel (1.), §. 5 schicke ich die Betrachtung des speciellen Falles voraus, wo die ersten Unterdeterminanten von w keinen Divisor gemeinsam haben, also w_1 für $r = c, c', \dots$ nicht verschwindet. Dabei werde ich zur Abkürzung der Darstellung die symbolische Bezeichnung anwenden, welche ich in der oben citirten Abhandlung (*Fr.*) auseinandergesetzt habe.

Aus der Identität

$$(rA-B)\left((rA-B)^{-1}-(sA-B)^{-1}\right)(sA-B) = (sA-B)-(rA-B) = (s-r)A$$

(in welcher die Producte und Potenzen die *Fr.* §. 1 und 2 definirte Bedeutung haben) ergiebt sich

$$(1.)\qquad -\frac{(rA-B)^{-1}-(sA-B)^{-1}}{r-s} = (rA-B)^{-1}A(sA-B)^{-1}.$$

Sind $c, c', \dots$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $w = 0$, ist $w = a(r-c)^e(r-c')^{e'}\dots$, und ist, in Partialbrüche zerlegt,

$$-\frac{W}{w} = (rA-B)^{-1} = \frac{Z_1}{(r-c)^e} + \frac{Z_2}{(r-c)^{e-1}} + \cdots + \frac{Z_e}{r-c}$$
$$+ \frac{Z_{e+1}}{(r-c')^{e'}} + \frac{Z_{e+2}}{(r-c')^{e'-1}} + \cdots + \frac{Z_{e+e'}}{r-c'} + \cdots,$$

so erhält man, indem man den Zähler der linken Seite der Formel (1.) nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ und $s-c'$ entwickelt,

$$-\frac{1}{(r-c)-(s-c')+(c-c')}\left(\frac{Z_1}{(r-c)^e}+\cdots+\frac{Z_e}{r-c}+\cdots-\frac{Z_{e+1}}{(s-c')^{e'}}-\cdots\frac{Z_{e+e'}}{s-c'}-\cdots\right).$$

Da in der Entwicklung des ersten Factors nur positive Potenzen von $r-c$ und $s-c'$ vorkommen, so findet sich in der Entwicklung der linken Seite der Formel (1.) keine negative Potenz von $r-c$ mit einer negativen Potenz von $s-c'$ multiplicirt. Da aber in der Entwicklung der rechten Seite dieser Formel

$$\left(\frac{Z_1}{(r-c)^e}+\cdots+\frac{Z_e}{r-c}+\cdots\right)A\left(\frac{Z_{e+1}}{(s-c')^{e'}}+\cdots+\frac{Z_{e+e'}}{s-c'}+\cdots\right)$$

derartige Glieder auftreten, so müssen ihre Coefficienten verschwinden, es muss also

$$(2.)\qquad (Z_\alpha A Z_{e+\beta})=0$$

sein (wo durch die Klammer der symbolische Charakter des Productes angedeutet werden soll).

Entwickelt man ferner die linke Seite der Formel (1.) nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ und $s-c$, so erhält man

$$\frac{1}{(r-c)(s-c)}\,\frac{1}{(r-c)^{-1}-(s-c)^{-1}}\Big[Z_1\big((r-c)^{-e}-(s-c)^{-e}\big)+\cdots$$
$$+Z_e\big((r-c)^{-1}-(s-c)^{-1}\big)\Big]-\frac{1}{(r-c)-(s-c)}\Big[T_0-T_0+T_1\big((r-c)-(s-c)\big)$$
$$+T_2\big((r-c)^2-(s-c)^2\big)+\cdots\Big]=$$
$$\frac{1}{(r-c)(s-c)}\Big[Z_1\big((r-c)^{-e+1}+(r-c)^{-e+2}(s-c)^{-1}+\cdots+(s-c)^{-e+1}\big)$$
$$+\cdots+Z_e\Big]-T_1-T_2\big((r-c)+(s-c)\big)-\cdots.$$

Hier kommen keine Glieder vor, welche $r-c$ und $s-c$ in einer niedrigeren als der $-(e+1)$ten Dimension enthalten, und die Glieder gleicher Dimension haben alle denselben Coefficienten. Vergleicht man damit die Entwicklung der rechten Seite der Formel (1.), so erkennt man, dass

$$(3.)\qquad (Z_\alpha A Z_\beta)=0$$

ist, falls $\alpha+\beta<e+1$ ist, dass aber

$$(4.)\qquad (Z_1 A Z_e) = (Z_2 A Z_{e-1}) = \cdots = (Z_e A Z_1) = Z_1 = H$$

ist. Zufolge der Formeln (2.) zerfällt die Determinante $n$ten Grades

$$|(Z_\alpha A Z_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n)$$

in das Product mehrerer Determinanten von den Graden $e, e', \cdots$. In der ersten derselben vom Grade e sind wegen der Formel (4.) alle Elemente der Nebendiagonale gleich H, und wegen (3.) alle Elemente links von dieser Diagonale gleich Null. Daher ist sie gleich $(-1)^{\frac{1}{2}e(e-1)} H^e$ (wo die Potenz nicht symbolisch gemeint ist), und folglich ist die betrachtete Determinante $n$ten Grades gleich

$$(-1)^{\Sigma \frac{1}{2} e(e-1)} \Pi H^e.$$

Weil aber

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = \sum_\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\varkappa} \frac{\partial (A Z_\beta)}{\partial x_\varkappa}$$

ist, so ist

$$|(Z_\alpha A Z_\beta)| = \left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\beta}\right| \left|\frac{\partial (A Z_\alpha)}{\partial x_\beta}\right|,$$

und weil

$$(A Z_\alpha) = \sum_\varkappa \frac{\partial A}{\partial y_\varkappa} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\varkappa}, \qquad \frac{\partial (A Z_\alpha)}{\partial x_\beta} = \sum_\varkappa a_{\beta\varkappa} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\varkappa}$$

ist, so ist

$$\left|\frac{\partial (A Z_\alpha)}{\partial x_\beta}\right| = a \left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|.$$

Damit ist die Formel (1.) §. 5 für den betrachteten speciellen Fall bewiesen.

§. 7.

Beweis des Satzes §. 5.

Bei dem allgemeinen Beweise der Formel (1.) §. 5 will ich die Formen $Z_1, Z_2, \dots Z_n$ etwas anders wie dort definiren, nämlich durch die Entwicklungen

$$\frac{W_1}{w_1}-\frac{W}{w}=\frac{Z_1}{(r-c)^{e_1}}+\cdots+\frac{Z_{e_1}}{r-c}+\cdots,$$

$$\frac{W_2}{w_2}-\frac{W_1}{w_1}=\frac{Z_{e_1+1}}{(r-c)^{e_2}}+\cdots+\frac{Z_{e_1+e_2}}{r-c}+\cdots, \text{ u. s. w.}$$

Die Abänderung kommt, wie leicht zu sehen, auf eine der am Ende des §. 5 erwähnten Umformungen der linken Seite jener Formel hinaus.

Ist U_ν die lineare Form der Variabeln $x_1, \dots x_n$, welche man aus $W_{\nu-1}$ erhält, indem man $y_\alpha = y_\alpha^{(\nu)}$ setzt, und V_ν die lineare Form von $y_1, \dots y_n$, welche man aus $W_{\nu-1}$ erhält, indem man $x_\alpha = x_\alpha^{(\nu)}$ setzt, so ist (*St.* §. 1. (1.))

$$W_\nu w_{\nu-1} = W_{\nu-1} w_\nu - U_\nu V_\nu,$$

also

$$\frac{W_1}{w_1}-\frac{W}{w} = -\frac{U_1 V_1}{w\, w_1}.$$

Sei

$$-w w_1 = (r-c)^{l+l_1} p_1 q_1,$$

wo p_1 und q_1 ganze Functionen von r oder nach ganzen positiven Potenzen von $r-c$ fortschreitende Reihen sind, und sei

$$\frac{U_1}{p_1} = (r-c)^{l_1}\,(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 (r-c) + \cdots + \mathrm{X}_{l_1} (r-c)^{l_1} + \cdots)$$

$$\frac{V_1}{q_1} = (r-c)^{l_1}\,(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 (r-c) + \cdots + \mathrm{Y}_{l_1} (r-c)^{l_1} + \cdots),$$

wo X_α eine lineare Function von $x_1, \dots x_n$ und Y_α eine lineare Function von $y_1, \dots y_n$ ist. Dann ist

$$-\frac{U_1 V_1}{w\, w_1} = \frac{1}{(r-c)^{e_1}}\,(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2(r-c)+\cdots)\,(\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2(r-c)+\cdots) = \frac{Z_1}{(r-c)^{e_1}}+\frac{Z_2}{(r-c)^{e_1-1}}+\cdots,$$

also

$$Z_1 = \mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_1 = H_1, \qquad Z_\alpha = \mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_\alpha + \mathrm{X}_2 \mathrm{Y}_{\alpha-1} + \cdots + \mathrm{X}_\alpha \mathrm{Y}_1.$$

Die Coefficienten $Z_1, Z_2, \dots Z_n$ aller negativen Potenzen von $r-c$, $r-c', \dots$ in den Entwicklungen der Ausdrücke

$$(1.) \qquad \frac{W_\nu}{w_\nu}-\frac{W_{\nu-1}}{w_{\nu-1}}, \quad \frac{W'_\nu}{w'_\nu}-\frac{W'_{\nu-1}}{w'_{\nu-1}}, \dots$$

lassen sich also durch n lineare Verbindungen X_α der Variabeln x_α und

durch n Verbindungen Y_α der Variabeln y_α darstellen, und es ist (*St.* §. 1) gezeigt worden, dass sowohl $X_1, \dots X_n$ als auch $Y_1, \dots Y_n$ unter einander unabhängige Linearformen sind*).

Addirt man alle negativen Potenzen in den sämmtlichen Entwicklungen der Ausdrücke (1.), so erhält man die Partialbruchzerlegung von

$$\left(\frac{W_1}{w_1}-\frac{W}{w}\right)+\left(\frac{W_2}{w_2}-\frac{W_1}{w_1}\right)+\cdots=-\frac{W}{w}=(rA-B)^{-1}.$$

Entwickelt man daher diese Partialbrüche einzeln nach absteigenden Potenzen von r, so setzt sich der Coefficient G von r^{-1} aus den Coefficienten von $(r-c)^{-1}$, $(r-c')^{-1}$, ... in jenen verschiedenen Entwicklungen zusammen, ist also gleich

$$G=\Sigma(X_1 Y_e + X_2 Y_{e-1}+\cdots+X_e Y_1).$$

In der oben benutzten symbolischen Bezeichnung kann man die soeben ausgeführte Umformung folgendermassen ausdrücken: Sei P die Substitution, welche die Variabeln X_α in x_α überführt, und Q die Substitution, welche Y_α in y_α überführt. Dann ist**)

$$(PZ_1Q)=x_1y_1,\quad (PZ_\alpha Q)=x_1y_\alpha+x_2y_{\alpha-1}+\cdots+x_\alpha y_1,$$
$$(PZ_{e_1+1}Q)=x_{e_1+1}y_{e_1+1},\ \dots,$$

endlich ist der Coefficient von r^{-1} in der Entwicklung von $P(rA-B)^{-1}Q$ nach absteigenden Potenzen von r gleich

$$(PGQ)=\Sigma(x_1y_e+x_2y_{e-1}+\cdots+x_ey_1).$$

---

*) An der Schwierigkeit, die Unabhängigkeit dieser Linearformen direct zu beweisen, liegt es, dass der allgemeine Beweis der Formel (1.) §. 5 so viel umständlicher ist, als der des §. 6 entwickelten speciellen Falles derselben.

**) Wenn eine bilineare Form $A=\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ durch lineare Substitutionen $x_\alpha=p_{1\alpha}x'_1+\cdots+p_{n\alpha}x'_n$, $y_\beta=q_{\beta 1}y'_1+\cdots+q_{\beta n}y'_n$ in $B=\Sigma b_{\alpha\beta}x'_\alpha y'_\beta$ übergeht, so ist $b_{\alpha\beta}=\sum_{\varkappa,\lambda}p_{\alpha\varkappa}a_{\varkappa\lambda}q_{\lambda\beta}$, also entsteht das System der Grössen $b_{\alpha\beta}$ durch Zusammensetzung der drei Systeme $p_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$. [*Weierstrass*, Berl. Mon. 1868, §. 1, (9.)—(12.)] Bezeichnet man also die Systeme der Grössen $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ mit den Buchstaben A, B, P, Q, so ist $B=(PAQ)$. Dieselbe Gleichung gilt, wenn diese Buchstaben die bilinearen Formen $\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$, $\Sigma b_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$, $\Sigma p_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$, $\Sigma q_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ bedeuten. Denn der Algorithmus der Zusammensetzung von bilinearen Formen, der oben benutzt ist, ist mit dem der Zusammensetzung von linearen Substitutionen identisch.

Setzt man beide Seiten der Gleichung

$$(rA-B)^{-1} = \frac{G}{r} + \frac{G_1}{r^2} + \cdots$$

mit $rA-B$ zusammen, so erhält man (*Fr.* §. 3)

$$E = (rA-B)\left(\frac{G}{r} + \frac{G_1}{r^2} + \cdots\right)$$

und daraus durch Vergleichung der constanten Glieder

$$E = (AG), \quad G = A^{-1},$$

also

$$(PA^{-1}Q) = \Sigma(x_1 y_e + x_2 y_{e-1} + \cdots + x_e y_1).$$

Folglich sind auch die reciproken Formen*)

$$(Q^{-1}AP^{-1}) = \Sigma(x_1 y_e + x_2 y_{e-1} + \cdots + x_e y_1)$$

einander gleich. Da das (symbolische) Product zweier Formen, welche kein Variabelnpaar gemeinsam haben, gleich Null ist, so ist, falls $\varrho \leqq e$ ist,

$$(x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1)\,\Sigma(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1) = (x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1)(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1)$$
$$= x_\varrho y_e + x_{\varrho-1} y_{e-1} + \cdots + x_1 y_{e-\varrho+1}\,.$$

Wenn nun Z_α und Z_β nicht in derselben Reihenentwicklung als Coefficienten vorkommen, so haben die Formen

$$(PZ_\alpha Q) = x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1, \quad (PZ_\beta Q) = x_{\varkappa+1} y_{\varkappa+\sigma} + \cdots + x_{\varkappa+\sigma} y_{\varkappa+1}$$

kein Variabelnpaar gemeinsam und folglich ist

$$(PZ_\alpha AZ_\beta Q) = (PZ_\alpha Q)(Q^{-1}AP^{-1})(PZ_\beta Q) =$$
$$(x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1)(\Sigma(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1))(x_{\varkappa+1} y_{\varkappa+\sigma} + \cdots + x_{\varkappa+\sigma} y_{\varkappa+1}) =$$
$$(x_\varrho y_e + x_{\varrho-1} y_{e-1} + \cdots + x_1 y_{e-\varrho+1})(x_{\varkappa+1} y_{\varkappa+\sigma} + \cdots + x_{\varkappa+\sigma} y_{\varkappa+1}) = 0,$$

---

*) Die reciproke Form der zerlegbaren Form $\Sigma(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1)$ ist gleich der Summe der reciproken Formen der einzelnen Theile (*Fr.* §. 5). Ist ferner

$$F = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1,$$

so ist

$$F^2 = \Sigma \frac{\partial F}{\partial y_\varkappa}\frac{\partial F}{\partial x_\varkappa} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = E$$

und folglich $F = F^{-1}$.

also da die Determinanten von P und Q nicht verschwinden (*Fr.* §. 2, I.):

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = 0.$$

Wenn aber Z_α und Z_β in derselben Entwicklung als Coefficienten vorkommen, so ist

$$(PZ_\alpha Q) = x_1 y_\alpha + \cdots + x_\alpha y_1, \quad (PZ_\beta Q) = x_1 y_\beta + \cdots + x_\beta y_1$$

und folglich

$$(PZ_\alpha A Z_\beta Q) = (PZ_\alpha Q)(Q^{-1} A P^{-1})(PZ_\beta Q) =$$

$$(x_1 y_\alpha + \cdots + x_\alpha y_1)(\Sigma(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1))(x_1 y_\beta + \cdots + x_\beta y_1) =$$

$$(x_\alpha y_e + x_{\alpha-1} y_{e-1} + \cdots + x_1 y_{e-\alpha+1})(x_1 y_\beta + \cdots + x_\beta y_1).$$

Ist $e-\alpha+1 > \beta$, oder $\alpha+\beta < e+1$, so ist dies Product gleich Null und daher ist auch

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = 0.$$

Ist aber $\alpha+\beta = e+1$, so ist jenes Product gleich

$$x_1 y_1 = (PZ_1 Q) = (PHQ),$$

und daher ist

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = H \qquad (\alpha+\beta = e+1).$$

Aus den entwickelten Relationen ergiebt sich die Formel (1.) §. 5 ganz in derselben Weise, wie im vorigen Paragraphen.

§. 8.

Die schiefe Invariante einer Schaar quadratischer Formen.

Ich nehme jetzt an, dass $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ ist, und verstehe im Folgenden unter W_ν, Z_α, H, A, B die quadratischen Formen, in welche die bisher mit diesen Buchstaben bezeichneten bilinearen Formen übergehen, wenn man $y_\alpha = x_\alpha$ und ausserdem $y_\alpha^{(\nu)} = x_\alpha^{(\nu)}$ setzt (vgl. *St.* §. 5. S. 39, 40). Dann geht die Formel (1.) §. 5 in

$$(-1)^{\Sigma\frac{e(e-1)}{2}} a \left|\frac{1}{2}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|^2 = \Pi H^e$$

über. Setzt man ferner voraus, dass die Zahlen e sämmtlich gerade sind (§. 1, VI.), so ist

$$\frac{e(e-1)}{2} \equiv \frac{e}{2} \pmod 2, \quad \Sigma e = n$$

und daher

$$(1.)\qquad \sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}} a} = \Pi\left(H^{\frac{e}{2}}\right) : \left|\frac{1}{2}\,\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|.$$

Wird die Schaar quadratischer Formen

$$rA - B = \Sigma (r a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, x_\alpha x_\beta$$

durch eine Substitution von der Determinante p in $rL - M$ transformirt, so ist die Determinante von L gleich ap^2. Bildet man daher für die transformirte Schaar, deren Determinante in die nämlichen Elementartheiler wie w zerfällt, den der rechten Seite von Formel (1.) analogen Ausdruck, so ist derselbe gleich dem ursprünglichen Ausdruck, mit $+p$ multiplicirt (§. 2). Dieser Ausdruck, welcher der Gleichung (1.) zufolge von den sämmtlichen Variabeln x_α und $x_\alpha^{(\nu)}$, $x_\alpha^{(\nu)'}$, ... unabhängig sein muss, ist also eine schiefe Invariante der Formenschaar $rA - B$.

Sei, um die Formel (1.) an einem Beispiel zu erläutern, $n = 2$ und

$$A = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad B = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

Wenn die Determinante von $rA - B$ für $r = 0$ verschwinden und nur den Elementartheiler r^2 haben soll, so muss

$$(2.)\qquad a\gamma - \beta^2 = 0, \quad a\gamma + c\alpha - 2b\beta = 0$$

sein, während α, β, γ nicht sämmtlich verschwinden. Mittelst dieser Gleichungen bestätigt man leicht die Relationen

$$(3.)\quad \sqrt{b^2 - ac} = \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha} = \frac{a\gamma - c\alpha}{2\beta} = \frac{b\gamma - c\beta}{\gamma} = \frac{(ax+by)(\beta x + \gamma y) - (bx + cy)(\alpha x + \beta y)}{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2},$$

wo von den ersten drei Quotienten wenigstens einer nicht die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ hat*).

---

*) Nach *Gauss*, Disqu. arithm. S. 244 und 249 (unten) ist, wenn man

$$X = pxx' + p'xy' + p''yx' + p'''yy'$$
$$Y = qxx' + q'xy' + q''yx' + q'''yy'$$

setzt,

Mit Hülfe der Lehre von den mehrfachen Wurzeln und den symmetrischen Functionen lässt sich zeigen, dass sich die schiefe Invariante (1.) durch die Coefficienten der Formen A und B rational ausdrücken lässt, dass also der Satz gilt:

Wenn die Elementartheiler der Determinante einer Schaar quadratischer Formen alle gerade Exponenten haben, so lässt sich die Quadratwurzel aus der Determinante jeder einzelnen Form der Schaar durch die Coefficienten der Grundformen rational ausdrücken.

Anstatt aber auf den allgemeinen Beweis dieses Satzes einzugehen, will ich im nächsten Paragraphen für den speciellen Fall, dass die ersten Unterdeterminanten von w keinen Theiler gemeinsam haben, direct eine von den Wurzeln der Gleichung $w=0$ unabhängige Darstellung der schiefen Invariante entwickeln.

§. 9.

Rationale Darstellung der schiefen Invariante.

Die Resultante der beiden ganzen Functionen $f(x)$ und

$$\varphi(x) = a\,(x-r_1)\,(x-r_2)\dots(x-r_n),$$

wo $r_1, r_2, \dots r_n$ nicht alle verschieden zu sein brauchen, oder die Norm

---

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x'} & \frac{\partial X}{\partial y'} \\ \frac{\partial Y}{\partial x'} & \frac{\partial Y}{\partial y'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p\,Y - q\,X & p'\,Y - q'\,X \\ p''Y - q''X & p'''Y - q'''X \end{vmatrix}$$

die Identität, welche der Lehre von der Composition der binären quadratischen Formen zu Grunde liegt. Die Formel für die Duplication ergiebt sich daraus, wenn X und Y symmetrische bilineare (oder quadratische) Formen sind (l. c. S. 337). Setzt man für diesen Fall $p=a$, $p'=p''=b$, $p'''=c$; $q=\alpha$, $q'=q''=\beta$, $q'''=\gamma$; $x'=x$, $y'=y$, $X=A$, $Y=B$, so erhält man die Identität

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 = (b^2-ac)\,B^2 + (a\gamma + c\alpha - 2b\beta)\,BA + (\beta^2 - \alpha\gamma)\,A^2,$$

aus der sich unter den Bedingungen (2.) die Gleichung (3.) ergiebt.

von $f(r)$, lässt sich in folgender Form darstellen: Ist c_ν der Coefficient von $x^{-\nu-1}$ in der Entwicklung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach absteigenden Potenzen von x und

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix} = C,$$

so ist (vgl. *Joachimsthal*, d. J. Bd. 48, S. 393)

$$(1.) \qquad \Pi f(r) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n C,$$

wo das Product über alle Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ auszudehnen ist. Die Grössen c_ν sind ganze Functionen der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$, dividirt durch eine Potenz von a.

Ist $\varphi(x) = a(\psi(x))^2$ das Quadrat einer ganzen Function, so lassen sich die Coefficienten von $\psi(x)$ durch die von $\varphi(x)$ rational ausdrücken. Ist $n = 2m$, d_ν der Coefficient von $x^{-\nu-1}$ in der Entwicklung von $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ nach absteigenden Potenzen von x und

$$\begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_{m-1} \\ d_1 & d_2 & \dots & d_m \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d_{m-1} & d_m & \dots & d_{2m-2} \end{vmatrix} = D,$$

so ist

$$\Pi' f(r) = \pm D,$$

wo das Product nur über die Wurzeln der Gleichung $\psi(x) = 0$ zu erstrecken ist, und folglich

$$\Pi f(r) = D^2.$$

Aus Formel (1.) ergiebt sich daher der Satz:

Ist $f(x)$ eine ganze Function und $\varphi(x)$ das Quadrat einer ganzen

Function mten Grades, und ist c_ν der Coefficient von $x^{-\nu-1}$ in der Entwicklung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach absteigenden Potenzen von x, so lässt sich die Determinante 2mten Grades $|c_{\alpha+\beta-2}|$ als das Quadrat einer rationalen Function der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ darstellen, deren Nenner eine Potenz des Coefficienten von x^{2m} in $\varphi(x)$ ist.

Wenn in der Determinante $w=\varphi(r)$ der bilinearen Form

$$C = rA - B = \Sigma(ra_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, x_\alpha y_\beta$$

die ersten Unterdeterminanten keinen Divisor gemeinsam haben, so ist der Bruch

$$-\frac{W}{w} = (rA-B)^{-1}$$

als Function von r irreductibel. Ist Z_ν der Coefficient von $r^{-\nu-1}$ in der Entwicklung derselben nach absteigenden Potenzen von r, so ergiebt sich aus der Formel (1.) §. 6

$$\Sigma(Z_\alpha A Z_\beta) r^{-\alpha-1} s^{-\beta-1} = \frac{1}{rs}\, \Sigma Z_\nu \frac{r^{-\nu-1} - s^{-\nu-1}}{r^{-1} - s^{-1}} =$$

$$\frac{1}{rs}\, \Sigma Z_\nu (r^{-\nu} + r^{-\nu+1} s^{-1} + \cdots + s^{-\nu})$$

und daher

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = Z_{\alpha+\beta}\,.$$

Mithin ist die Determinante

$$Z = \begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{n-1} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_n \\ . & . & \dots & . \\ Z_{n-1} & Z_n & \dots & Z_{2n-2} \end{vmatrix}$$

gleich der Determinante

$$|(Z_\alpha A Z_\beta)| = a \left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\beta}\right| \left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|.$$

Ist nun w ein Quadrat, so ist nach dem obigen Lemma

$$Z = (-1)^{\frac{n}{2}} H^2,$$

wo H eine rationale Function der Coefficienten von W und w, also der Grössen $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, x_α, y_β ist. Wenn nun $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$ ist, und man $y_\alpha=x_\alpha$ setzt, so ergiebt sich aus den entwickelten Formeln

$$(2.)\qquad \sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}}a}=H:\left|\frac{1}{2}\,\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|$$

als rationale schiefe Invariante der Schaar quadratischer Formen $rA-B$.

Zürich, im Februar 1878.

Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung.

Mit Rücksicht auf die Abhandlung des Herrn Newcomb im 83. Bande dieses Journals.

(Von Herrn *W. Killing*.)

Herr *Newcomb* legt der von ihm untersuchten Raumform alle von *Euklid* theils ausdrücklich theils implicite vorausgesetzten Eigenschaften bei mit zwei Ausnahmen: er lässt die Gerade sich schliessen und fügt die Annahme hinzu, dass der Abstand s zweier Punkte, die auf den Schenkeln eines unendlich kleinen Winkels α in der Entfernung r vom Scheitel liegen, durch die Gleichung gegeben werde:

$$s = \frac{2\alpha D}{\pi} \sin \frac{r\pi}{2D},$$

wo $2D$ die Länge der geraden Linie bezeichnet. Auf diesen Voraussetzungen, so zeigt er, lässt sich eine Raumform aufbauen, und diese stimmt für unendlich kleine Theile mit der *Euklid*ischen überein. Auch hat die gewonnene Raumform grosse Aehnlichkeit mit der von *Riemann* gefundenen und nach ihm benannten Raumform constanter positiver Krümmung. Dennoch stehen mehrere der von Herrn *Newcomb* hergeleiteten Eigenschaften in directem Widerspruch mit Folgerungen, welche *Riemann* für seine Raumform dargelegt hatte, und die bereits in viele Abhandlungen und in die „Elemente der absoluten Geometrie" des Herrn *Frischauf* übergegangen sind. Herr *Newcomb* hält beide Raumformen für identisch und bezeichnet demnach diese Angaben *Riemanns* als unrichtig. Dementgegen bezweckt die vorliegende Mittheilung, zunächst darauf aufmerksam zu machen, dass sich die fraglichen Sätze aus den Voraussetzungen *Riemanns* in voller Strenge ergeben; an zweiter Stelle wollen wir zeigen, in welcher Weise die Gleichungen der *Riemann*schen Geometrie auch auf eine andere

Raumform angewandt werden können, welche identisch ist mit der von Herrn *Newcomb* untersuchten; zum Schlusse wollen wir eine Betrachtung angeben, welche gestattet, die zweite Raumform rein geometrisch aus der ersten herzuleiten.

1. Zunächst stelle ich die Formeln zusammen, welche bereits früher, namentlich von Herrn *Beltrami**), für Räume constanter positiver Krümmung entwickelt sind. Dabei glaube ich, mich auf drei Dimensionen beschränken zu dürfen, da die Uebertragung auf eine höhere Zahl von Dimensionen keine Schwierigkeit macht.

Wenn das Krümmungsmass einer Raumform constant $= \frac{1}{k^2}$ ist, so kann nach *Riemann* das Linienelement auf die Form gebracht werden:

$$ds^2 = \frac{16k^4(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}{(4k^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}.$$

Durch die Substitution:

$$\xi = 2k\frac{x}{p+k},\quad \eta = 2k\frac{y}{p+k},\quad \zeta = 2k\frac{z}{p+k},$$

$$p^2 = k^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

geht dieser Ausdruck über in:

$$ds^2 = k^2\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - dp^2}{p^2}.$$

Aus dieser Gleichung leitet Herr *Beltrami* folgende Resultate her.

Sind x, y, z und x', y', z' zwei versc[illegible]dene Werthetripel, so giebt es durch die dargestellten Punkte immer eine [illegible] kürzeste Linie. Der Abstand r der Punkte, d. h. die Länge des zw[illegible]nen enthaltenen Theiles der kürzesten Linie, ergiebt sich aus der [illegible]

$$\cos\frac{r}{k} = \frac{k^2 + xx' + yy' + zz'}{\sqrt{k^2+x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{k^2+x'^2+y'^2+\ldots}}$$

[illegible]

Für reelle Werthe der Coordinaten ist die rech[illegible] Gleichung reell und ihrem absoluten Betrage nach kleiner als [illegible]

---

*) Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Mat[illegible] Ser. II. Tom. II.

kürzeste Linie selbst wird dargestellt durch zwei Gleichungen ersten Grades zwischen x, y, z.

Um die Nenner zu vermeiden, kann man neue Variabele*) einführen durch die Substitution:

$$(1.)\quad x = \frac{u}{t},\quad y = \frac{v}{t},\quad z = \frac{w}{t},$$

$$(2.)\quad k^2 t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = k^2.$$

Ihr Zusammenhang mit den ξ, η, ζ wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$(3.)\quad t = \frac{4k^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}{4k^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},\quad u = \frac{4k^2 \xi}{4k^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$v = \frac{4k^2 \eta}{4k^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},\quad w = \frac{4k^2 \zeta}{4k^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

und

$$(4.)\quad \xi = \frac{2u}{1+t},\quad \eta = \frac{2v}{1+t},\quad \zeta = \frac{2w}{1+t}.$$

Dann erhält man:

$$(5.)\quad k^2 \cos\frac{r}{k} = k^2 tt' + uu' + vv' + ww'.$$

Die Gesammtheit der Punkte, welche von zwei Punkten 0 und 1 gleichen Abstand haben, wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(6.)\quad k^2(t_0 - t_1)\, t + (u_0 - u_1)\, u + (v_0 - v_1)\, v + (w_0 - w_1)\, w = 0.$$

Wir fragen nach der Möglichkeit von Transformationen, bei denen die Ausdrücke (2.) und (5.) unverändert bleiben. Diese müssen offenbar homogen und linear sein; umgekehrt wird jede solche Transformation, durch welche der Ausdruck (2.) in sich übergeht, die rechte Seite von (5.) unverändert lassen. Alle diese Transformationen lassen sich erhalten durch Verbindung von zwei speciellen Arten: die erste verändert nur die

---

*) Diese Coordinaten verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn *Weierstrass*, der dieselben bei einigen Vorträgen im mathematischen Seminar 1872 benutzte. Dieselben zeichnen sich ausser durch Einfachheit der Formeln noch durch den Umstand aus, dass sie, wie die Gleichungen (3.) und (4.) lehren, den Werthen ξ, η, ζ eindeutig entsprechen.

u, v, w und ist identisch mit der sogenannten orthogonalen Transformation. Die letztere kann durch die beiden Forderungen definirt werden, dass erstens die ursprünglichen Coordinaten aus den neuen durch dieselben Gleichungen erhalten werden sollen, wie diese aus jenen, und dass zweitens für t_0, u_0, v_0, w_0 beide Systeme denselben Werth liefern; diese ist:

$$(7.)\qquad \frac{t+T}{t_0}=\frac{u+U}{u_0}=\frac{v+V}{v_0}=\frac{w+W}{w_0}$$
$$=\frac{2}{k^2}(k^2tt_0+uu_0+vv_0+ww_0).$$

Wenn zwischen den Coefficienten einer homogenen linearen Form:

$$(8.)\qquad ak^2t+bu+cv+dw$$

die Relation besteht:

$$(9.)\qquad a^2k^2+b^2+c^2+d^2=k^2,$$

so bleibt dieselbe bei jeder Transformation der bezeichneten Art bestehen; da ausserdem unter dieser Bedingung und bei reellen Werthen der Variabeln und Constanten der Werth von (8.) zwischen $-k^2$ und $+k^2$ liegt, so kann man setzen:

$$(10.)\qquad ak^2t+bu+cv+dw=k^2\sin\frac{\varrho}{k}.$$

Wenn man noch eine zweite solche Form $a'k^2t+b'u+c'v+d'w$ hinzunimmt, so darf gesetzt werden:

$$(11.)\qquad k^2aa'+bb'+cc'+dd'=k^2\cos\varphi;$$

denn die linke Seite ist unabhängig vom Coordinatensystem und, absolut genommen, kleiner als k^2.

2. Wir gehen zur Interpretation der aufgestellten Gleichungen über und nehmen dabei an, dass jedem Werthsystem nur ein einziger Punkt entspricht.

Durch die Aufstellung der obigen Gleichungen haben wir die Möglichkeit der Messung postulirt; diese kann aber geometrisch nur durch starre Bewegung ausgeführt werden; wir müssen daher auch diese voraussetzen und annehmen, dass Punktepaare mit gleichem Abstande, und nur solche, zur Deckung gebracht werden können. Dann lehren unsere Gleichungen, dass jede kürzeste Linie (wenigstens im allgemeinen) alle Eigenschaften besitzt, die *Euklid* der Geraden beilegt; sie soll daher als solche

bezeichnet werden. Ebenso zeigt jede durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten dargestellte Fläche die Grundeigenschaften der Ebene. Die Gleichung (5.) ist die Gleichung der Kugel; für $r=0, k\pi, \ldots.$ genügt derselben je nur ein einziger Punkt; für $r=\frac{1}{2}k\pi, \frac{3}{2}k\pi, \ldots$ geht die Kugel in eine Ebene über. Da sich für alle ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}k\pi$ dieselbe Gleichung ergiebt, so existirt zu jedem Punkte eine einzige Ebene, welche alle Punkte mit den bezeichneten Abständen enthält; sie möge als Polarebene des Punktes bezeichnet werden, ein Name, dessen Berechtigung sowohl aus der Definition als aus der Gleichung (5.) hervorgeht. Namentlich zeigt sich, dass die Polarebenen zu den Punkten einer Geraden dieselbe zweite Gerade gemeinschaftlich haben.

Unsere Gleichungen gestatten, den Begriff des Winkels geometrisch genau in derselben Weise herzuleiten, wie es in der *Euklid*ischen Geometrie geschieht. Dann erkennt man rein geometrisch, dass jeder Radius einer Kugel auf der Kugelfläche senkrecht steht; eine Gerade steht somit auch senkrecht auf der Polarebene eines jeden ihrer Punkte. Demnach stellt ϱ in (10.) den senkrechten Abstand des Punktes t, u, v, w von derjenigen Ebene dar, für deren Punkte die linke Seite dieser Gleichung verschwindet; indem wir nämlich (10.) mit (5.) vergleichen, erkennen wir, dass diese Ebene die Polarebene zu dem Punkte a, b, c, d ist und dass $\frac{\varrho}{k}$ das Complement ist zu $\frac{r}{k}$, wo r den Abstand der Punkte t, u, v, w und a, b, c, d bedeutet. Wenn wir dies Resultat auf die drei Ebenen: $ku=0$, $kv=0$, $kw=0$ anwenden, ergiebt sich sofort die geometrische Bedeutung der Coordinaten u, v, w eines Punktes als $k\sin\frac{\varrho}{k}$, wo ϱ den Abstand von einer dieser Ebenen bedeutet; t stellt nach (5.) den Cosinus der durch k dividirten Entfernung zwischen dem zu bestimmenden Punkte und dem Punkte $(1, 0, 0, 0)$ dar.

Dieselbe Interpretation der Gleichung (10.) kann auch gewonnen werden, indem man von dem Winkel zweier Ebenen ausgeht; dieser wird durch die Gleichung (11.) geliefert. Wenn nämlich drei Ebenen:

$$A_1=0,\quad A_2=0,\quad A_3=0$$

in der durch (9.) definirten Form gegeben sind, und für drei Constante $\varkappa, \lambda, \mu$ die Gleichung besteht:

$$\varkappa A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0,$$

so mögen aus (11.) die drei Werthe $\varphi_{2,3}$, $\varphi_{3,1}$, $\varphi_{1,2}$ für je zwei dieser Ebenen berechnet werden; zwischen denselben besteht die Relation:

$$\varphi_{2,3} + \varphi_{3,1} + \varphi_{1,2} = 0.$$

Berücksichtigt man noch, dass für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ in (11.) $a = a'$, $b = b'$ u. s. w. sein muss, so folgt, dass φ den Winkel der beiden Ebenen darstellt.

Die Gleichungen (2.), (5.) — (11.) bilden somit die Grundlage für eine vollständige „analytische Geometrie". Die projectivische Geometrie, welche daraus hergeleitet wird, zeigt keinen wesentlichen Unterschied von der *Euklid*ischen; wenn man z. B. eine rationale Function zwischen t, u, v, w durch (2.) homogen macht, so darf man den Grad der Function als die Ordnung der entsprechenden Fläche definiren. Für $k = \infty$ wird $t = 1$, und u, v, w gehen in die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten der *Euklid*ischen Geometrie über, und unsere Formeln werden mit denen der letzteren identisch. Umgekehrt kann man bei einem endlichen Werthe von k das betrachtete Gebiet so klein wählen, dass der Unterschied von den Eigenschaften der *Euklid*ischen Geometrie beliebig klein wird.

3. Die bisherigen Entwickelungen genügen aber nicht, um eine Raumform vollständig aufzubauen, da wir das Zusammenfallen von Punkten ganz ausser Acht gelassen haben. Hierfür gestatten unsere Gleichungen einen zweifachen analytischen Ausdruck und führen somit zu zwei Raumformen.

Wenn wir zunächst *Riemann* folgen und seine Raumform erhalten wollen, so dürfen wir jedem Punkte nur ein einziges Werthsystem der ξ, η, ζ und wegen der durch (3.) und (4.) gegebenen eindeutigen Beziehung der ξ, η, ζ und t, u, v, w, auch nur ein einziges Werthsystem der t, u, v, w beilegen; denn *Riemann* hat weder bei seinen allgemeinen Betrachtungen noch bei der Darlegung seiner speciellen Raumform auf die Möglichkeit hingewiesen, dass demselben Punkte verschiedene Coordinatenwerthe zukommen. Unter dieser Voraussetzung gehen alle geraden Linien, welche

einen Punkt (t, u, v, w) enthalten, noch durch einen zweiten Punkt ($-t$, $-u$, $-v$, $-w$), welcher der Gegenpunkt des ersten heissen möge. Die Länge der Geraden beträgt $2k\pi$, die grösste absolute Entfernung zweier Punkte ist gleich $k\pi$; nur der Gegenpunkt besitzt diesen Abstand. Nicht nur jede Kugelfläche, sondern auch die Ebene hat, für sich betrachtet, alle Eigenschaften, welche der Kugelfläche im *Euklid*ischen Raume zukommen. Die Ebene, sowie jede einfach geschlossene Fläche ohne Doppellinien, trennt zwei Theile des Raumes gegen einander ab. Die Ebene hat zwei Pole, welche Gegenpunkte zu einander sind. Alle Punkte, welche von zwei Punkten gleichen Abstand haben, liegen auf einer einzigen Ebene (6.) Drei Ebenen haben entweder eine Gerade oder ein Paar von Gegenpunkten gemeinschaftlich. In der Ebene trennt jede Gerade zwei congruente Flächentheile gegen einander ab; jeder geschlossene Zweig einer ebenen Curve ohne Doppelpunkte zerlegt die Ebene.

Unter diesen Eigenschaften, die sich direct aus den obigen Gleichungen ablesen lassen, finden sich alle jene, welche *Riemann* seiner Raumform beilegt; dieselben sind also strenge Folgerungen aus den gemachten Annahmen.

4. Gleichwie in der *Riemann*schen Raumform je zwei Punkte mit der Entfernung $= 2k\pi$ zusammenfallen, so können wir versuchen, unsere Gleichungen unter der Annahme zu deuten, dass je zwei Punkte mit dem Abstande $= k\pi$ zusammenfallen. Dann stellen die beiden Werthsysteme t, u, v, w und $-t$, $-u$, $-v$, $-w$ denselben Punkt dar. Zwei verschiedene gerade Linien haben somit höchstens einen einzigen Punkt gemeinschaftlich. Die Länge der Geraden beträgt $k\pi$, die grösste absolute Entfernung zweier Punkte ist $= \frac{1}{2} k\pi$; alle Punkte, welche von einem Punkte diesen Abstand haben, liegen auf der Polarebene desselben. Die Ebene zerlegt den Raum nicht; zwischen zwei beliebigen Punkten, die ihr nicht angehören, lässt sich immer eine Linie ziehen, die keinen Punkt mit der Ebene gemeinschaftlich hat. Dasselbe gilt für jede Fläche von ungerader Ordnung, welche keine Doppellinien besitzt und aus einem einzigen Zweige besteht; hat nämlich für zwei Punkte die Function, welche für die Punkte der Fläche verschwindet, entgegengesetztes Zeichen, so

kann man ihrem Werthe für den einen Punkt dadurch das entgegengesetzte Zeichen geben, dass man die Coordinaten durch die entgegengesetzten ersetzt; zwischen den Punkten ist daher immer ein Uebergang möglich, der nicht durch Null hindurchgeht.

Die Punkte, welche von zwei Punkten gleichen Abstand haben, liegen auf zwei Ebenen (6.), und diese stehen auf einander senkrecht.

Während die eigentliche Kugelfläche wieder dieselben Eigenschaften hat, wie in der *Euklid*ischen Raumform, zeigt die Ebene vor allem den Unterschied, dass sich geschlossene Linien in ihr ziehen lassen, welche eine Zerlegung nicht herbeiführen; eine solche ist die Gerade.

Wir sehen, diese Raumform ist vollständig identisch mit der von Herrn *Newcomb* untersuchten; um auch in der Form volle Uebereinstimmung zu erhalten, haben wir nur $k\pi$ durch $2D$ zu ersetzen; auch das unter 3. jener Abhandlung aufgestellte und oben von uns citirte Postulat ergiebt sich sehr leicht aus unsern Gleichungen.

5. Der Umstand, dass die zweite Voraussetzung über die Coincidenz von Punkten uns zu keinem Widerspruch geführt hat, darf uns nicht hindern, die principielle Berechtigung derselben zu untersuchen. Wir denken uns zu dem Ende ein endliches Stück irgend einer Raumform gegeben; alle Eigenschaften desselben seien entwickelt und durch Gleichungen dargestellt. Indem wir uns den Raum unbegrenzt fortgesetzt denken, werden wir auch den Coordinaten neue Werthe beilegen müssen. Wir dürfen aber nicht annehmen, dass die erstgenannte Fortsetzung analytisch darauf hinauskomme, den Coordinaten alle reellen Werthe beizulegen; vielmehr kann die analytische Fortsetzung in einzelnen Fällen weiter oder enger sein, als die, etwa durch starre Bewegung vermittelte, geometrische. Daraus ergeben sich drei Annahmen:

a) beide Gebiete fallen zusammen;

b) das geometrisch erreichbare Gebiet wird schon dargestellt durch einen Theil der sämmtlichen Coordinatenwerthe;

c) wenn man den Coordinaten alle reellen Werthe beilegt, so hat man das Gebiet der Punkte noch nicht erreicht.

Für eine Raumform von drei Dimensionen sagen diese drei Annahmen aus: Entweder lässt sich vermittelst der angewandten Coordinaten

der ganze Raum auf den ganzen *Euklid*ischen abbilden, oder zu seiner Abbildung genügt ein Theil des *Euklid*ischen, oder die Abbildung auf den *Euklid*ischen liefert nur einen Theil des betrachteten Raumes. Die zweite Annahme zerlegt sich aber in zwei: entweder führt die Fortsetzung der Coordinaten zu einem idealen Gebiet, welches durch Bewegung aus dem ursprünglich gegebenen Raumtheil nicht erhalten werden kann, oder die Fortsetzung der Coordinaten führt zu früheren Punkten zurück. Ein Beispiel der ersten Annahme bildet die *Lobatschewsky*sche Raumform, welche aus den obigen Gleichungen für einen negativen Werth von k^2 erhalten wird; wenn wir hier von einem positiven Werthe von t ausgehen, können wir durch Bewegung nicht zu einem negativen Werthe gelangen, oder unter Benutzung der x, y, z muss immer sein: $x^2+y^2+z^2<k^2$, wenn dies für das ursprünglich betrachtete Gebiet der Fall war. Die zweite Annahme stellt sich bei der Vergleichung der Geraden und des Kreises in der *Euklid*ischen Raumform dar; betrachten wir beide Gebilde als Raumformen, d. h. ohne Rücksicht auf ihre Lage zu andern Gebilden, so erhalten wir für Theile von ihnen dieselben Eigenschaften und können somit für diese Theile dieselben Gleichungen aufstellen; während aber die unbeschränkte Fortsetzung der Coordinatenwerthe für die Gerade zu immer neuen Theilen führt, lässt sie uns auf dem Kreise zum Ausgangspunkte zurückkehren: im letzteren Falle entsprechen jedem Punkte verschiedene Coordinatenwerthe.

Untersuchen wir jetzt unsere Gleichungen nach diesen verschiedenen Möglichkeiten. Zunächst erkennen wir, dass das Gebiet der t, u, v, w unter der Bedingung (2.) nicht enger ist, als das geometrisch erreichbare; denn für jede mögliche Bewegung geben die oben angedeuteten Transformationen einen adäquaten Ausdruck, und diese lassen uns immer in dem analytischen Bereiche. Auf dieselbe Weise erkennen wir, dass die Fortsetzung der Coordinaten zu keinem idealen Gebiete führen kann. Es bleiben daher nur die beiden Möglichkeiten, dass jedem Punkte ein einziger Werth der Coordinaten zukommt, oder dass jeder Punkt verschiedene solche Werthe besitzt. Der Begriff des Abstandes lehrt aber, dass, wenn irgend zwei Punkte mit dem Abstande r zusammenfallen, dasselbe für je zwei Punkte desselben Abstandes eintreten wird. Wenn aber r kein Viel-

faches von $k\pi$ ist, so liefert die Gleichung (5.) Werthsysteme der t, u, v, w, welche unter einander jeden beliebigen Abstand von Null bis zu einer bestimmten obern Grenze ergeben; wollten wir für einen solchen Abstand Coincidenz voraussetzen, so müssten wir auch alle Punkte mit diesen Abständen als zusammenfallend betrachten, und die Darstellung verschiedener Punkte wäre unmöglich. Entsprechend unsern obigen Voraussetzungen, bleiben daher nur die beiden Möglichkeiten, dass für den Abstand $2k\pi$ oder $k\pi$ Coincidenz eintritt. Wenn wir die ξ, η, ζ als rechtwinklige Coordinaten des *Euklid*ischen Raumes betrachten, so stellen die Gleichungen (3.) eine Abbildung der betrachteten Raumformen auf die *Euklid*ische dar, und zwar wird der *Riemann*sche Raum auf den ganzen *Euklid*ischen abgebildet, der zweite Raum nur auf das Innere einer Kugel*).

---

*) Ich möchte darauf aufmerksam machen, dass die obige geometrische Interpretation nicht, wie die von Herrn *Beltrami* gegebene, die Unveränderlichkeit des Winkels voraussetzt, sondern sie aus dem Begriffe des Abstandes herleitet. Ausserdem bemerke ich, dass die Coordinaten x, y, z eine ähnliche geometrische Bedeutung haben, wie u, v, w; an die Stelle von sinus tritt tangens, und statt der Abstände von den Coordinatenebenen sind die Abschnitte zu setzen, welche durch Ebenen, die zu den Axen senkrecht stehen, auf ihnen vom Nullpunkte aus abgeschnitten werden. Diese Coordinaten bilden ein Beispiel zu der unter c) aufgestellten Möglichkeit, indem die Gesammtheit der reellen Werthe von x, y, z nicht genügt, um alle Punkte der *Riemann*schen Raumform zu erhalten; zur eindeutigen Bestimmung eines Punktes muss etwa noch das Zeichen von $\sqrt{k^2+x^2+y^2+z^2}$ gegeben werden; die durch diese Coordinaten vermittelte Abbildung des *Riemann*schen Raumes auf den *Euklid*ischen liefert somit den letzteren doppelt. Dieser Umstand scheint Herrn *Beltrami* entgangen zu sein; er macht darauf nicht aufmerksam, sondern sucht die Unbestimmtheit der durch zwei Punkte gelegten Geraden in anderer Weise zu erklären. Er sagt, durch zwei Punkte, für die x, y, z endlich seien, lasse sich immer nur eine einzige Gerade legen; eine Verschiedenheit trete erst bei unendlichen Werthen der Coordinaten ein. Der letzte Umstand rührt aber nur von der Wahl des Anfangspunktes her, kann also keine Verschiedenheit begründen; im Gegentheil, wenn die beiden Punkte einer Geraden, denen unendlich grosse Werthe von x, y, z zukommen, verschieden sind, so sind je zwei Punkte verschieden, deren Darstellung ein verschiedenes Zeichen der Wurzel erfordert; da sie zudem Gegenpunkte sind, so wird die hindurchgehende Gerade unbestimmt. Uebrigens stimmt Herr *Beltrami* in der Definition der *Riemann*schen Raumform mit uns überein, da er dieselbe als einfach zusammenhängend bezeichnet und am Ende seiner Abhandlung den Satz aufstellt: Jede *Riemann*sche Raumform von n Dimensionen ist in einer *Lobatschewsky*schen Raumform von $n+1$ Dimensionen enthalten. Für einen negativen Werth von k^2 stellen aber die obigen Gleichungen nur eine einzige Raumform dar, und unter den in ihr enthaltenen Raumformen niederer Dimension giebt es nur solche von der zuerst betrachteten Art. Das zuletzt erwähnte Resultat hat in den trefflichen „Elementen der absoluten Geometrie" des Herrn *Frischauf* zu dem unrichtigen Satze Veranlassung gegeben, der *Riemann*sche Raum sei im *Lobatschewsky*schen enthalten.

6. Obgleich wir an dieser Stelle auf eine geometrische Untersuchung der behandelten Raumformen nicht eingehen wollen, möchten wir doch in aller Kürze ein Uebertragungsprinzip angeben, wodurch die zweite Form rein geometrisch aus der ersten erhalten wird. Dasselbe besteht darin, statt des Punktes die Ebene als Element einer Raumform zu betrachten. Obwohl eine solche Anschauung in der projektivischen Geometrie seit langem gebräuchlich ist, hat man es bisher unterlassen, auf dieser Voraussetzung eine vollständige Geometrie aufzubauen. Diese Möglichkeit stellte sich mir dar, als ich aus einigen Bemerkungen des Herrn *Weierstrass* den Schluss zog, dass die Grundbegriffe und die ersten Sätze der Geometrie mit unseren Vorstellungen verbunden werden können, wenn wir statt des Punktes die Ebene als Element auffassen. Diese Betrachtung lässt aus der *Lobatschewsky*schen, *Euklid*ischen und *Riemann*schen Raumform drei neue hervorgehen, welche als die Polarformen jener bezeichnet werden mögen. Wir wollen hier nur auf die letzte von ihnen aufmerksam machen.

Wir ersetzen also den Punkt durch die Ebene, und demgemäss die Gerade durch den Ebenenbüschel, die Ebene durch den Ebenenbündel. Die Herleitung der weiteren Begriffe (Abstand zweier Elemente, Winkel von Büscheln und Bündeln, senkrechter Abstand eines Elements von einem Büschel oder Bündel und dergl.) bietet keinen Unterschied von der Herleitung, welche bei der gewöhnlichen Anschauung gebräuchlich ist; wenn, was dabei öfter benutzt wird, während einer Bewegung ein Element in Ruhe bleiben soll, so kommt das darauf hinaus, dass die entsprechende Ebene während der Bewegung in Deckung bleibt mit ihrer Anfangslage. Speziell wird der Abstand zweier Elemente durch den Winkel der beiden Ebenen vertreten. Nun können wir als Coordinaten einer Ebene die Constanten a, b, c, d in (8.) ansehen, wenn zwischen ihnen die Relation (9.) besteht; der Winkel, den zwei Ebenen mit einander bilden, ergiebt sich dann aus der Gleichung (11.) Diese unterscheidet sich

---

Dieses Versehen, welches zu einigen weitern unrichtigen Bemerkungen (No. 105 und No. 123 am Ende) geführt hat, ist bereits von mir in der *Hoffmann*schen Zeitschrift (B. VII., S. 464) berichtigt worden.

von (5.) nur dadurch, dass a, b, c, d an die Stelle von t, u, v, w, und φ an die von $\frac{r}{k}$ getreten ist. Da ausserdem (9.) mit (2.) identisch ist, so können wir die t, u, v, w als Coordinaten einer Ebene auffassen und gelangen, da a, b, c, d und $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ dieselbe Ebene darstellen, zu unserer zweiten Annahme über Coincidenz. Somit ist die von Herrn *Newcomb* untersuchte Raumform die Polarform der *Riemann*schen.

Berlin, December 1877.

Ueber Strahlensysteme zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Bekanntlich hat Herr *Kummer**) zuerst die Existenz von sieben wesentlich verschiedenen algebraischen Strahlensystemen zweiter Ordnung ohne Brenncurven nachgewiesen, und die wichtigsten Eigenschaften ihrer Brennflächen entwickelt Die eine dieser Brennflächen, nämlich die „*Kummer*sche" Fläche vierter Ordnung und vierter Classe mit 16 Knotenpunkten und 16 singulären Berührungsebenen, hat bald darauf als Singularitätenfläche des allgemeinen Strahlencomplexes zweiten Grades neues Interesse erregt**); und ganz kürzlich bildeten ihre merkwürdigen Beziehungen zu Theta-Functionen mit zwei Variabeln den Gegenstand mehrerer Abhandlungen in diesem Journal***). Der synthetischen Geometrie waren jene Strahlensysteme zweiter Ordnung und ihre Brennflächen bislang nicht zugänglich.

Deshalb dürfte der Nachweis nicht ohne Interesse sein, dass man mit den Hülfsmitteln der reinen Geometrie der Lage zu allen diesen Strahlensystemen zweiter Ordnung mit Ausnahme desjenigen sechster Classe erster Art gelangen kann. Ich beabsichtige diesen Nachweis zu führen, jedoch der grösseren Anschaulichkeit wegen nicht unmittelbar für die

---

*) *Kummer*, über die algebraischen Strahlensysteme. (Abhandlungen der Berl. Akademie, math. Kl. 1866).

**) *Plücker*, neue Geometrie des Raumes, Lpz. 1868/9, S. 307. — *F. Klein*, zur Theorie der Liniencomplexe 1. und 2. Grades. (Math. Ann. II, S. 198.) — *F. Klein* und *S. Lie*, über die Haupttangenten-Curven der *Kummer*schen Fläche 4. Grades. (Monatsbericht der Berl. Akad., 15. Dec. 1870).

***) *Cayley*, Bd. 83, S. 210 und 84, S. 238. — *Borchardt*, Bd. 83, S. 234. — *H. Weber*, Bd. 84, S. 332.

Strahlensysteme zweiter Ordnung, sondern für die zu ihnen reciproken Strahlensysteme zweiter Classe. Die synthetische Behandlung dieser Systeme wird verhältnissmässig leicht und einfach dadurch, dass sie auf gewöhnliche Strahlenbündel projectiv bezogen und dass zugleich ihre Brennflächen auf bekannte Flächen vierter Ordnung eindeutig abgebildet werden. Mit dem Strahlensysteme zweiter Ordnung und zweiter Classe und der *Kummer*schen Fläche vierten Grades werden wir uns besonders eingehend beschäftigen.

1. Ein F^2-Gebüsch Σ (d. h. ein dreifach unendliches, lineares System von Flächen zweiter Ordnung F^2) kann, wie ich anderswo*) gezeigt habe, auf ein räumliches System Σ_1 projectiv bezogen werden, sodass jeder F^2 von Σ eine Ebene in Σ_1 entspricht und jedem F^2-Büschel von Σ ein zu ihm projectiver Ebenenbüschel I. Ordnung von Σ_1. Man nehme nämlich einen beliebigen Punkt U an, und weise jeder F^2 des Gebüsches diejenige Ebene von Σ_1 als entsprechende zu, welche von U die Polarebene ist bezüglich der F^2. Jeder Raumcurve $C^{2.2}$ vierter Ordnung, in welcher zwei Flächen des Gebüsches sich schneiden, entspricht dann im Raume Σ_1 eine Gerade als Schnittlinie der zugehörigen beiden Polarebenen von U; jeder Gruppe [2,2,2] von acht „associirten" Punkten, in welchen drei beliebige Flächen des Gebüsches Σ sich schneiden, entspricht in Σ_1 der Schnittpunkt der zugehörigen drei Ebenen. Umgekehrt entspricht im Allgemeinen jeder Geraden von Σ_1 eine reelle oder imaginäre $C^{2.2}$ des Gebüsches Σ, und jedem Punkte von Σ_1 eine Gruppe von acht associirten Punkten. Zwei Gruppen associirter Punkte von Σ können durch eine $C^{2.2}$ verbunden werden, weil die entsprechenden beiden Punkte von Σ_1 auf einer Geraden liegen; drei Gruppen associirter Punkte liegen allemal auf einer F^2 des Gebüsches. Durch drei beliebige Punkte von Σ geht im Allgemeinen eine einzige F^2 des Gebüsches; derselben entspricht die Verbindungsebene der zugehörigen drei Punkte von Σ_1. — Alle diese Beziehungen ändern sich nicht wesentlich, wenn an Stelle von Σ_1 ein zu Σ_1 collineares räumliches System gesetzt wird.

---

*) In meiner „Geometrie der Lage" (Hannover 1868), II. Abth. S. 246.

2. Jede Verbindungs-Gerade s von zwei associirten Punkten des Gebüsches Σ nenne ich einen „Hauptstrahl" desselben. Ihr entspricht in Σ_1 eine Gerade s_1, und zugleich ist sie der Träger einer involutorischen Punktreihe, in welcher je zwei zugeordnete Punkte einander associirt sind (vgl. jedoch 10.). Denn den beiden associirten Punkten entspricht in Σ_1 ein und derselbe Punkt P_1, einem beliebigen dritten Punkte von s entspricht in Σ_1 ein Punkt Q_1, und der Geraden $\overline{P_1 Q_1}$ oder s_1 entspricht folglich in Σ eine $C^{2.2}$, welche mit s drei Punkte gemein hat, also in s und eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt. Einem beliebigen Ebenenbüschel von Σ_1, dessen Axe mit s_1 keinen Punkt gemein hat, entspricht nun aber in Σ ein F^2-Büschel, welcher von s in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird, und die Punktenpaare der letzteren bestehen aus je zwei associirten Punkten, weil sie den einzelnen Punkten der Geraden s_1 entsprechen. — Aus diesem Beweise ergiebt sich zugleich, dass jede Gerade von Σ, welcher in Σ_1 eine Gerade entspricht, ein Hauptstrahl des Gebüsches und einer Raumcurve dritter Ordnung associirt ist.

Von den beiden Ordnungspunkten der involutorischen Punktreihe s ist jeder sich selbst associirt und bezüglich aller Flächen des Gebüsches dem anderen conjugirt. Alle F^2 von Σ, welche durch einen sich selbst associirten Punkt gehen, berühren in ihm den Hauptstrahl s, welcher ihn mit dem conjugirten Punkte verbindet. Die sich selbst associirten Punkte sind zugleich die Mittelpunkte aller Kegelflächen des F^2-Gebüsches, und ihr geometrischer Ort ist bekanntlich eine Fläche 4. Ordnung K^4, die „Kernfläche" des Gebüsches.

3. Ein F^2-Büschel von Σ enthält im Allgemeinen vier Kegelflächen; die auf K^4 liegenden Mittelpunkte derselben bilden das Poltetraëder des F^2-Büschels. Dem F^2-Büschel entspricht aber in Σ_1 ein Ebenenbüschel, dessen Axe als eine beliebige Gerade von Σ_1 zu betrachten ist, und den vier Kegelflächen entsprechen vier Ebenen, welche durch diese Gerade gehen. Demnach umhüllen alle Ebenen von Σ_1, welche den Kegelflächen des F^2-Gebüsches entsprechen, eine Fläche vierter Classe Φ^4; dieselbe ist eindeutig auf die Kernfläche K^4 bezogen, indem jeder Berührungsebene von Φ^4 der Mittelpunkt M der zugehörigen Kegelfläche auf K^4 entspricht. Wir wollen zeigen, dass in demjenigen Punkte M_1 von Σ_1, welcher diesem

Punkte M der Kernfläche K^4 entspricht, die Fläche Φ^4 von der entsprechenden Berührungsebene tangirt wird.

Einer beliebigen Geraden g_1 der Berührungsebene entspricht eine $C^{2.2}$ auf der zugehörigen Kegelfläche des Gebüsches; diese $C^{2.2}$ aber hat den Punkt M zum Doppelpunkt und schneidet die Kernfläche K^4 zweimal in M, wenn g_1 durch M_1 geht. In diesem Falle hat also g_1 mit der Fläche von Σ_1, welche jener Kernfläche entspricht, zwei in M_1 sich vereinigende Punkte gemein, und berührt dieselbe in M_1. Jene durch M_1 gehende Gerade g_1 ist ausserdem als Schnittlinie von zwei unendlich nahe benachbarten Berührungsebenen der Fläche Φ^4 aufzufassen, weil bekanntlich von den vier Kegelflächen II. Ordnung, welche durch eine $C^{2.2}$ gehen, zwei zusammenfallen, wenn die $C^{2.2}$ durch allmälige Umformung einen Doppelpunkt M erhält; und da M der Mittelpunkt dieser beiden zusammenfallenden Kegelflächen ist, so wird Φ^4 in dem entsprechenden Punkte M_1 von der zugehörigen Ebene des Raumes Σ_1 berührt.

Die Fläche Φ^4 ist im Allgemeinen von der 16. Ordnung; ihre 16 Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden entsprechen den 16 Schnittpunkten der Kernfläche K^4 mit der zugehörigen $C^{2.2}$ des Gebüsches.

4. Jedem Hauptstrahle s des F^2-Gebüsches entspricht in Σ_1 eine Doppeltangente der Fläche Φ^4, und umgekehrt. Der Hauptstrahl bildet nämlich (2.) mit der ihm associirten Raumcurve dritter Ordnung eine $C^{2.2}$ des Gebüsches, welche zwei Doppelpunkte hat, und den letzteren entsprechen in Σ_1 die Berührungspunkte der zugehörigen Doppeltangente von Φ^4 (3.). Die Umkehrung des Satzes setzt voraus, dass die Tangenten von Φ^4 definirt werden als Schnittlinien unendlich nahe benachbarter Berührungsebenen der Fläche. Die Geraden einer singulären Berührungsebene, welche die Φ^4 in allen Punkten eines Kegelschnitts tangirt, sind in diesem Sinne keine Doppeltangenten der Φ^4; ihnen entsprechen auch im Allgemeinen keine Hauptstrahlen des Gebüsches, sondern je zwei eine $C^{2.2}$ bildende Kegelschnitte. Dagegen ist jede Gerade, welche durch einen Knotenpunkt der Φ^4 geht, als Tangente dieser Fläche aufzufassen.

5. Durch einen beliebigen Punkt von Σ_1 gehen 28 Doppeltangenten an die Fläche vierter Classe Φ^4; dieselben entsprechen den 28 Verbindungslinien der acht associirten Punkte [2,2,2] von Σ, welche jenem

Punkte entsprechen, und sind den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung reciprok. Durch einen Punkt M_1 der Fläche Φ^4 gehen nur 22 Doppeltangenten dieser Fläche, weil von den acht entsprechenden Punkten zwei in M zusammenfallen; sechs von diesen 22 Doppeltangenten liegen in der Ebene, welche in M_1 die Fläche Φ^4 berührt, und sind als sechs Paare unendlich nahe benachbarter Doppeltangenten aufzufassen. Die Doppeltangenten von Φ^4 bilden demnach ein Strahlensystem 28. Ordnung [12. Classe], und Φ^4 ist die „*Brennfläche*" dieses Systems, d. h. der Ort aller Punkte und aller Ebenen, für welche zwei Strahlen des Systems zusammenfallen.

6. Jeder Geraden l des Gebüsches Σ, welche keine associirten Punkte verbindet, entspricht in Σ_1 ein zu l projectiver Kegelschnitt λ_1. Legt man nämlich durch drei Punkte A_1, B_1, C_1 von Σ_1, deren entsprechende A, B, C auf l liegen, eine Ebene, so entspricht dieser eine durch l gehende F^2 des Gebüsches, und der Geraden l entspricht folglich eine in jener Ebene liegende Curve λ_1. Beziehen wir aber zwei Ebenenbüschel, deren Axen beliebig durch A_1 und B_1 gelegt sind, derartig auf einander, dass in jedem dritten Punkte C_1 von λ_1 zwei homologe Ebenen sich schneiden, so sind dieselben projectiv, weil die ihnen entsprechenden F^2-Büschel von Σ dadurch perspectiv auf die Punktreihe l bezogen sind, und λ_1 ist folglich ein zu l projectiver Kegelschnitt. In zwei Gerade kann λ_1 nicht zerfallen (2.).

7. Der Kegelschnitt λ_1 von Σ_1, welcher einer beliebigen Geraden l von Σ entspricht, berührt die Fläche Φ^4 in vier Punkten M_1; dieselben entsprechen den vier Punkten M, welche die Kernfläche K^4 mit l gemein hat. Legt man nämlich durch einen dieser Punkte M eine beliebige F^2 des Gebüsches, so schneidet dieselbe in M und einem zweiten Punkte N die Gerade l, und ihr entspricht in Σ_1 eine Ebene, welche mit dem Kegelschnitt λ_1 zwei Punkte M_1 und N_1 gemein hat; wenn aber jene F^2 den Punkt M zum Doppelpunkt hat, so fällt N mit M zusammen, und die ihr entsprechende Berührungsebene von Φ^4 tangirt folglich den Kegelschnitt λ_1 in ihrem Berührungspunkte M_1. — Einer beliebigen Linie $\varkappa$ von Σ, welche die Kernfläche K^4 in n Punkten schneidet, entspricht ebenso eine Linie $\varkappa_1$ von Σ_1, welche in den zugehörigen n Punkten die Fläche Φ^4 berührt; doch

ist $\varkappa_1$ doppelt oder dreifach u. s. w. zu zählen, wenn die Punkte der Linie $\varkappa$ zu zweien oder dreien u. s. w. associirt sind, so dass z. B. jedem Hauptstrahle von Σ eine doppelt gelegte Gerade entspricht (vgl. 2.).

8. Einer beliebigen Ebene von Σ entspricht in Σ_1, wie ich a. a. O. näher auseinandergesetzt habe, eine *Steiner*sche Fläche vierter Ordnung dritter Classe; den Geraden der Ebene entsprechen die Kegelschnitte, in welchen diese Fläche von ihren Berührungsebenen geschnitten wird. Aus der Abbildung der *Steiner*schen Fläche auf der Ebene von Σ ergiebt sich, dass die letztere drei Hauptstrahlen des Gebüsches enthält; dieselben entsprechen den drei Doppelgeraden der Fläche, welche sich in dem dreifachen Punkte der Fläche schneiden. Die Hauptstrahlen des F^2-Gebüsches bilden demnach ein Strahlensystem dritter Classe siebenter Ordnung (2.), dessen Brennfläche, wie wir beiläufig erwähnen, der Kernfläche K^4 associirt und von der 24sten Ordnung ist. Der Curve vierter Ordnung $C^{1.4}$, in welcher K^4 von einer Ebene geschnitten wird, entspricht in Σ_1 eine Raumcurve achter Ordnung, denn die $C^{1.4}$ hat mit einer beliebigen F^2 des Gebüsches acht Punkte gemein; der Ebene aber entspricht eine *Steiner*sche Fläche vierter Ordnung, welche die Fläche Φ^4 in allen Punkten jener Raumcurve achter Ordnung berührt (7.).

9. Das F^2-Gebüsch enthält im Allgemeinen zehn Ebenenpaare*), und die Kernfläche K^4 geht durch deren zehn Doppellinien. Jedem Ebenenpaare von Σ entspricht in Σ_1 eine singuläre Berührungsebene von Φ^4; nämlich Φ^4 wird von derselben in allen Punkten des Kegelschnittes berührt, welcher der Doppellinie des Ebenenpaares entspricht (3. und 6.). Wenn alle Flächen des Gebüsches durch n Punkte gehen, von denen keine vier in einer Ebene liegen, so enthält, wie man leicht einsieht (2.), die Kernfläche K^4 auch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien dieser Punkte, und letztere sind Knotenpunkte von K^4 (vgl. 12.). Diese n Knotenpunkte entsprechen einem jeden Punkte des Raumes Σ_1 und sind jedem Punkte von Σ associirt; ausser ihnen entsprechen einem beliebigen Punkte von Σ_1 noch $8-n$ Punkte. Die Doppeltangenten der Fläche Φ^4, welche den

---

*) Vgl. dieses Journal Bd. 82, S. 76.

Strahlen eines beliebigen der n Punkte entsprechen (vgl. 10.), bilden demnach ein Strahlensystem $(8-n)^{ter}$ Ordnung; dasselbe ist von der zweiten Classe, d. h. es liegen nur zwei seiner Strahlen in einer beliebigen Ebene, weil einer Ebene von Σ_1 eine F^2 des Gebüsches entspricht, von welcher im Allgemeinen zwei Gerade durch jenen Knotenpunkt gehen. Die Fläche Φ^4 ist in diesem besonderen Falle von der Ordnung $2\cdot(8-n)=16-2n$, weil die ihr entsprechende Kernfläche K^4 von einer beliebigen $C^{2.2}$ des Gebüsches in jedem der n Knotenpunkte zweimal und folglich ausserdem nur noch in $16-2n$ Punkten geschnitten wird (vgl. 3.).

10. Wenn alle Flächen des Gebüsches durch einen Punkt A gehen, so ist jede durch A gelegte Gerade s ein Hauptstrahl von Σ; ihr entspricht in Σ_1 eine zu s projective Gerade s_1. Denn verbindet man zwei Punkte von Σ_1, welche zwei beliebigen Punkten von s entsprechen, durch eine Gerade s_1, so muss diese einer $C^{2.2}$ von Σ entsprechen, welche in s und eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt; und betrachtet man s_1 als Schnitt eines Ebenenbüschels von Σ_1, so liegt die Punktreihe s perspectiv zu dem entsprechenden F^2-Büschel von Σ und ist folglich projectiv zu s_1. In s_1 giebt es hiernach einen Punkt A_1, welchem in s nur der Punkt A entspricht, und zwar doppelt, so dass jede F^2, welche einer durch A_1 gehenden Ebene von Σ_1 entspricht, in A den Hauptstrahl s berührt. Zwei beliebig durch A gelegten Strahlen s entsprechen nur dann, wenn sie auf einer F^2 des Gebüsches liegen, zwei sich schneidende Gerade s_1; die Punkte A_1 dieser Geraden sind deshalb im Allgemeinen von einander verschieden.

11. Jeder Ebene, welche durch zwei der Punkte A_1 geht, entspricht in Σ eine F^2, welche die zugehörigen beiden Hauptstrahlen und also auch deren Ebene im Punkte A berührt (10.); der Ebene α_1, welche beliebige drei der Punkte A_1 verbindet, muss demnach eine F^2 entsprechen, welche in A drei verschiedene Berührungsebenen besitzt, d. h. eine Kegelfläche mit dem Mittelpunkte A. Daraus folgt, dass alle Punkte A_1 von Σ_1, welchen der gemeinschaftliche Punkt A des F^2-Gebüsches doppelt entspricht, in der Ebene α_1 liegen. Weist man jedem Strahle s von A denjenigen Punkt A_1 zu, welcher auf der entsprechenden Geraden s_1 liegt, so ist der Strahlenbündel A collinear auf die Ebene α_1 be-

zogen; denn jeder geraden Punktreihe von α_1 entspricht nach dem Vorhergehenden ein ebener Strahlenbüschel von A. Einer durch A gehenden Ebene von Σ entspricht in Σ_1 abgesehen von der Ebene α_1 eine geradlinige Fläche dritter Ordnung; dieselbe hat mit einer Geraden von Σ_1 drei Punkte gemein, weil die entsprechende $C^{2.2}$ mit der Ebene ausser A nur drei Punkte gemein hat. Wird die Ebene durch Drehung eines Hauptstrahles s beschrieben, so erzeugt der entsprechende Strahl s_1 die Fläche dritter Ordnung; letztere ist eindeutig auf die Ebene bezogen, und bildet mit der Ebene α_1 zusammen eine zerfallende *Steiner*sche Fläche vierter Ordnung.

12. Der Kegelfläche des F^2-Gebüsches, welche A zum Mittelpunkt hat, entspricht in der Ebene α_1 ein zu ihr projectiver Kegelschnitt (11.), und ihren Strahlen entsprechen im Raume Σ_1 Strahlen s_1, welche in α_1 liegen. Diese Strahlen s_1 bilden in α_1 einen Büschel sechster Ordnung; denn eine beliebige Gerade von Σ_1 schneidet sechs von ihnen, weil die entsprechende $C^{2.2}$ mit der Kegelfläche A ausser ihrem Mittelpunkte noch sechs Punkte gemein hat. Ein beliebiger Strahl von A schneidet die Kernfläche K^4 ausser in A noch in den beiden Punkten, welche er mit der ihm associirten Raumcurve dritter Ordnung gemein hat; von diesen beiden Punkten aber fällt der eine mit A zusammen, wenn der Strahl und folglich auch die ihm associirte Raumcurve auf der Kegelfläche A liegt. Der Punkt A ist demnach ein conischer Knotenpunkt von K^4, und sein Tangentenkegel ist eine Fläche des Gebüsches. Die Ebene α_1 anderseits ist eine singuläre Berührungsebene der Fläche Φ^4; sie berührt die Φ^4 in allen Punkten des Kegelschnittes, welcher jenem Tangentenkegel in α_1 entspricht. Während einem beliebigen Punkte der Kernfläche K^4 nur ein einziger Punkt von Φ^4 entspricht, haben alle Punkte dieses Kegelschnittes den Knotenpunkt A von K^4 zum entsprechenden Punkt.

13. Jeder Ebene ε des Knotenpunktes A, welche einem Ebenenpaare von Σ angehört, entspricht in Σ_1 eine singuläre Berührungsebene ε_1 von Φ^4 (9.). Einem Punkte P_1 von ε_1 entsprechen in Σ acht associirte Punkte, von welchen A und drei andere in ε liegen; durch P_1 gehen deshalb drei Strahlen der Ebene ε_1, welchen drei in ε liegende Strahlen von A entsprechen. Die Kegelfläche A des F^2-Gebüsches wird von ε

in zwei Strahlen geschnitten, welche beide der Geraden $\overline{\varepsilon_1 \alpha_1}$ entsprechen.

14. Wenn alle Flächen des F^2-Gebüsches *einen* Punkt A mit einander gemein haben, so bilden alle den Strahlen von A entsprechenden Doppeltangenten der Fläche Φ^4 ein *Strahlensystem zweiter Classe siebenter Ordnung**) (9.). Je zwei Strahlen dieses Systemes können durch eine geradlinige Fläche dritter Ordnung verbunden werden, deren Erzeugende sämmtlich dem Systeme angehören; dieselbe entspricht (11.) einer durch A gehenden Ebene von Σ und berührt die Brennfläche Φ^4 des Strahlensystemes in allen Punkten einer Raumcurve sechster Ordnung (vgl. 8.). Das Strahlensystem hat eilf singuläre Ebenen, und zwar eine α_1 mit einem Strahlenbüschel sechster Ordnung (12.) und zehn Doppelstrahlen, und zehn ε_1 mit Strahlenbüscheln dritter Ordnung und je einem Doppelstrahle $\overline{\varepsilon_1 \alpha_1}$ (13.). Seine Brennfläche Φ^4 ist von der vierten Classe und 14ten Ordnung und wird von den eilf singulären Ebenen in allen Punkten je eines Kegelschnittes berührt (9. und 12.); von der singulären Ebene α_1 wird sie ausserdem in einer Curve sechster Classe mit zehn Doppeltangenten geschnitten.

15. Wir nehmen jetzt an, dass alle Flächen des Gebüsches durch zwei Punkte A, B gehen, deren Verbindungslinie c heisse. Ist dann C_1 der Punkt von Σ_1, welcher einem beliebigen dritten Punkte von c entspricht, so muss C_1 allen Punkten von c entsprechen; denn jeder durch C_1 gehenden Ebene von Σ_1 entspricht eine durch c gehende F^2 des Gebüsches. Dem Punkte C_1 entsprechen ausser der Geraden c noch vier Punkte C, welche einander und allen Punkten von c associirt sind. Die vier Ebenenpaare, welche durch c und die vier Punkte C gelegt werden können, gehören zu dem F^2-Gebüsch, und ihnen entsprechen vier durch C_1 gehende singuläre Ebenen $\varkappa_1$ von Σ_1; die übrigen sechs Ebenenpaare des F^2-Gebüsches schneiden die Gerade c in dem Punktenpaare A, B. Die Punkte A und B sind die Mittelpunkte von zwei Kegelflächen des Gebüsches, welchen in Σ_1 zwei durch C_1 gehende singuläre Berührungsebenen α_1 und β_1 der Fläche Φ^4 entsprechen (12.). Jedem Punkte von

*) Vgl. *Kummer* a. a. O. S. 81.

α_1 entsprechen abgesehen von A und B nur fünf Punkte der Kegelfläche A (vgl. 12.); den Strahlen dieser Kegelfläche entsprechen deshalb in Σ_1 die Strahlen eines in α_1 liegenden Büschels fünfter Ordnung.

16. Weil zwei beliebig durch A oder B gelegte Gerade von Σ projectiv auf die ihnen in Σ_1 entsprechenden Geraden bezogen sind (10.), so entspricht einer durch c gelegten Ebene φ im Allgemeinen eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung F_1^2 von Σ_1; die beiden Regelschaaren derselben entsprechen den Strahlenbüscheln A und B von φ und sind zu ihnen projectiv, der Geraden c entsprechen zwei durch C_1 gehende und in α_1 und β_1 liegende Strahlen, und einer beliebigen Geraden von φ entspricht (6.) ein durch C_1 gehender Kegelschnitt von F_1^2. Der Ebene φ_1, welche in C_1 die Fläche F_1^2 berührt, entspricht eine F^2 des Gebüsches Σ, welche mit φ nur die Gerade c gemein hat, also eine von φ berührte Kegelfläche ist. Der Curve vierter Ordnung, in welcher die Kernfläche K^4 von der Ebene φ geschnitten wird, entspricht auf der Fläche Φ^4 abgesehen von den Berührungs-Kegelschnitten der singulären Ebenen α_1 und β_1 eine Raumcurve $C_1^{2.2}$ vierter Ordnung erster Species, längs welcher Φ^4 von F_1^2 berührt wird (8.). Wenn die Ebene φ durch einen der vier Punkte C geht, so entspricht ihr eine singuläre Berührungsebene $\varkappa_1$ von Φ^4 (15.), und den in ihr liegenden Strahlen von A und B entsprechen die Tangenten eines Kegelschnittes von $\varkappa_1$.

Wenn φ den Ebenenbüschel c beschreibt, so beschreibt die Ebene φ_1, welche in C_1 die Fläche F_1^2 berührt, einen zu c projectiven Ebenenbüschel zweiter Ordnung; denn zwei beliebige Ebenen der Bündel A und B werden von dem Ebenenbüschel c in zwei perspectiven Strahlenbüscheln geschnitten, und da A auf α_1 und B auf β_1 collinear bezogen ist (11.), so entsprechen diesen Büscheln in α_1 und β_1 zwei projective Punktreihen, deren Paare homologer Punkte auf den Ebenen jenes Büschels zweiter Ordnung liegen. Zu demselben gehören insbesondere die singulären Ebenen α_1, β_1 und die vier $\varkappa_1$. Der Schnittlinie von zwei Ebenen dieses Büschels zweiter Ordnung entspricht im F^2-Gebüsch eine $C^{2.2}$, durch welche zwei Kegelflächen gehen und welche in c und eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt; diese Raumcurve tangirt die Gerade c, und die beiden Kegelflächen fallen zusammen, wenn die beiden Ebenen sich unbegrenzt einander nähern. Wir

schliessen daraus, dass die Berührungsstrahlen des Ebenenbüschels zweiter Ordnung die Fläche Φ^4 im Punkte C_1 tangiren und dass C_1 ein Knotenpunkt von Φ^4 ist.

17. Alle Doppeltangenten der Fläche Φ^4, welche den Strahlen des Punktes A im vorliegenden Falle entsprechen, bilden ein *Strahlensystem zweiter Classe sechster Ordnung* *) (9.). Dasselbe kann durch eine Regelschaar beschrieben werden, welche die Fläche Φ^4 längs einer $C^{2.2}$ berührt und deren Leitschaar ebenfalls aus Doppeltangenten von Φ^4 besteht (16.). Seine Brennfläche Φ^4 ist von der vierten Classe und der zwölften Ordnung; sie ist auch von dem gleichartigen Strahlensystem, welches dem Strahlenbündel B entspricht, die Brennfläche. Das Strahlensystem hat zwölf singuläre Ebenen, von welchen sechs, nämlich α_1, β_1 und vier Ebenen $\varkappa_1$, einem Ebenenbüschel zweiter Ordnung C_1 angehören (16.); von den sechs übrigen ε_1 wird α_1 in sechs Doppelstrahlen des Systemes geschnitten (vgl. 14.). Von dem System enthält α_1 einen Strahlenbüschel fünfter Ordnung (15.), β_1 einen gewöhnlichen Strahlenbüschel C_1, welcher der Geraden c von Σ entspricht (16.), jede der vier Ebenen $\varkappa_1$ einen Büschel zweiter Ordnung (16.) und jede der sechs Ebenen ε_1 einen Büschel dritter Ordnung mit einem Doppelstrahle $\overline{\varepsilon_1 \alpha_1}$ (13.). Die Brennfläche Φ^4 hat einen Knotenpunkt C_1 und wird von den 12 singulären Ebenen in den Punkten je eines Kegelschnittes berührt; von den Ebenen α_1 und β_1 wird sie ausserdem in je einer Curve fünfter Classe mit sechs Doppeltangenten geschnitten (s. o.), und von jeder der sechs Ebenen ε_1 in zwei Curven dritter Classe mit je einer Doppeltangente $\overline{\varepsilon_1 \alpha_1}$ oder $\overline{\varepsilon_1 \beta_1}$.

18. Wir nehmen jetzt an, dass alle Flächen des F^2-Gebüsches einem Dreiecke umschrieben seien, in welchem den Eckpunkten A, B, C die resp. Seiten a, b, c gegenüberliegen. Diesen Seiten entsprechen in Σ_1 drei Punkte A_1, B_1, C_1 (15.), und der Dreiecks-Ebene $\triangle$, welche einem Ebenenpaare des Gebüsches angehört, entspricht in Σ_1 die Ebene $A_1 B_1 C_1$ oder $\triangle_1$. Jedem Punkte von $\triangle_1$ entspricht in $\triangle$ abgesehen von A, B, C ein einziger Punkt, und jeder Geraden g_1 von $\triangle_1$ entspricht in $\triangle$ ein

*) Dasselbe ist dem Strahlensystem 2. Ordn. 6. Cl. reciprok, welches Herr *Kummer* a. a. O. S. 102 als „von der zweiten Art" bezeichnet.

durch A, B, C gehender Kegelschnitt γ; derselbe zerfällt in $\overline{BC}$ und eine durch A gehende Gerade g, wenn g_1 durch A_1 geht. Dem Strahlenbüschel A von $\triangle$ entspricht umgekehrt der zu A projective Büschel A_1 von $\triangle_1$, und einer beliebigen Geraden l von $\triangle$ entspricht in $\triangle_1$ ein zu l projectiver Kegelschnitt λ_1 (6.), welcher durch A_1, B_1, C_1 geht.

Von denjenigen neun Ebenenpaaren $\varkappa$ des Gebüsches, welchen $\triangle$ nicht angehört, gehen (15.) drei durch jede Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks $A\,B\,C$. Ihnen entsprechen demnach in Σ_1 neun singuläre Ebenen $\varkappa_1$, von welchen drei durch jeden der Punkte A_1, B_1, C_1 gehen. Den drei Kegelflächen des Gebüsches, welche A, B und C zu Mittelpunkten haben, entsprechen in Σ_1 drei durch resp. $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ und $\overline{A_1B_1}$ gehende singuläre Ebenen α_1, β_1, γ_1 (12.).

19. Alle Doppeltangenten der Fläche Φ^4, welche den Strahlen des Punktes A nunmehr entsprechen, bilden ein *Strahlensystem zweiter Classe fünfter Ordnung**). Dasselbe kann auf zweifache Art durch eine Regelschaar beschrieben werden, welche die Fläche Φ^4 in den Punkten einer $C^{2.2}$ berührt und deren Leitschaar gleichfalls aus Doppeltangenten von Φ^4 besteht; diese veränderliche Regelschaar entspricht einem Strahlenbüschel von A, dessen Ebene entweder durch $\overline{AB}$ oder durch $\overline{AC}$ geht (16.). Die Fläche Φ^4 ist die Brennfläche des Strahlensystemes sowie derjenigen beiden Systeme zweiter Classe fünfter Ordnung, welche den Strahlenbündeln B und C entsprechen; sie ist von der vierten Classe und zehnten Ordnung. Das Strahlensystem hat 13 singuläre Ebenen, und zwar (18., 17.) drei, $\triangle_1$, β_1 und γ_1, mit Strahlenbüscheln erster Ordnung, sechs $\varkappa_1$ mit Büscheln zweiter Ordnung, drei $\varkappa_1$ mit Büscheln dritter Ordnung und je einem Doppelstrahle, und eine α_1 mit einem Büschel vierter Ordnung und drei Doppelstrahlen $\overline{\varkappa_1\,\alpha_1}$ (vgl. 14. und 17.). Durch jeden der drei Punkte A_1, B_1, C_1 gehen sechs von den 13 singulären Ebenen, z. B. durch B_1 gehen $\triangle_1$, α_1, γ_1 und drei $\varkappa_1$ (18.); diese sechs Ebenen liegen in einem Ebenenbüschel zweiter Ordnung (16.). Die Brennfläche Φ^4 hat A_1, B_1 und C_1 zu Knotenpunkten (16.) und wird von den 13 singulären Ebenen längs 13 Kegelschnitten berührt; von den Ebenen α_1, β_1, γ_1 wird sie ausserdem in je einer Curve vierter

*) Vgl. *Kummer* a. a. O. S. 88.

Classe mit drei Doppeltangenten geschnitten, und von jeder der neun Ebenen $\varkappa_1$ in einem Kegelschnitte und einer Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente (s. o.).

20. Wenn alle Flächen des F^2-Gebüsches einem Tetraëder $ABCD$ umschrieben sind, so entspricht dem Strahlenbündel A ein *Strahlensystem zweiter Classe vierter Ordnung**) von Doppeltangenten der Fläche Φ^4. Dasselbe kann auf dreifache Art durch eine veränderliche Regelschaar beschrieben werden, welche die Φ^4 längs einer $C^{2.2}$ berührt. Die Fläche Φ^4 ist von der achten Ordnung; sie ist die Brennfläche jenes Systemes und der gleichartigen drei Strahlensysteme, welche den Bündeln B, C und D entsprechen. Das Strahlensystem hat 14 singuläre Ebenen; vier derselben α_1, β_1, γ_1, δ_1 entsprechen den vier Kegelflächen A, B, C, D des Gebüsches, vier andere α_1', β_1', γ_1', δ_1' entsprechen Ebenenpaaren, welche je eine dem Eckpunkte A, B, C resp. D gegenüberliegende Tetraëderfläche enthalten, die sechs übrigen $\varkappa_1$ entsprechen den sechs Ebenenpaaren von Σ, welche durch die drei Paar Gegenkanten des Tetraëders gehen. Von dem Strahlensysteme enthält jede der sechs Ebenen β_1, γ_1, δ_1, β_1', γ_1', δ_1' einen gewöhnlichen Strahlenbüschel, jede der sechs Ebenen $\varkappa_1$ einen Büschel zweiter Ordnung und jede der beiden Ebenen α_1 und α_1' einen Büschel dritter Ordnung mit dem Doppelstrahle $\overline{\alpha_1\,\alpha_1'}$.

Die Brennfläche Φ^4 hat sechs Knotenpunkte, durch welche je sechs von den 14 singulären Ebenen gehen; diese Knotenpunkte entsprechen den sechs Kanten des Tetraëders (16.). Die sechs singulären Ebenen eines jeden Knotenpunktes berühren eine Kegelfläche zweiter Ordnung, den Tangentenkegel des Knotenpunktes (16.). In jeder der 6 Ebenen $\varkappa_1$ liegen zwei, in jeder der übrigen 8 singulären Ebenen liegen drei von den 6 Knotenpunkten, weil die entsprechenden Flächen des Gebüsches durch zwei resp. drei Kanten des Tetraëders $A\,B\,C\,D$ gehen. Die Brennfläche Φ^4 wird von den 14 singulären Ebenen längs 14 Kegelschnitten berührt, ausserdem aber von den sechs $\varkappa_1$ in je zwei Kegelschnitten und von den übrigen acht singulären Ebenen in je einer Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente geschnitten.

---

*) Vgl. *Kummer* a. a. O. S. 81.

21. Wenn alle Flächen des F^2-Gebüsches einem räumlichen Fünfeck 1 2 3 4 5 umschrieben sind, so entspricht dem Strahlenbündel 1 ein *Strahlensystem zweiter Classe dritter Ordnung* *). Dasselbe kann auf vier verschiedene Arten durch eine Regelschaar beschrieben werden. Die Brennfläche Φ^4 dieses Systemes ist zugleich von vier anderen, gleichartigen Strahlensystemen die Brennfläche; sie ist von der sechsten Ordnung und hat zehn Knotenpunkte (ik), welche den zehn Kanten $\overline{ik}$ des Fünfecks entsprechen. Das Strahlensystem hat fünfzehn singuläre Ebenen; fünf derselben (i) entsprechen den fünf Kegelflächen des Gebüsches, welche die Eckpunkte $i = 1, 2, 3, 4, 5$ des Fünfecks zu Mittelpunkten haben, die übrigen zehn $(i\,k\,l)$ entsprechen den zehn Ebenenpaaren des Gebüsches, welche je eine Fläche $i\,k\,l$ und die gegenüberliegende Kante des Fünfecks 1 2 3 4 5 enthalten. Von dem Strahlensystem liegt in jeder der fünf Ebenen (1), (234), (345), (452) und (523) ein Büschel zweiter Ordnung und in jeder der übrigen zehn singulären Ebenen ein gewöhnlicher Strahlenbüschel, wie sich aus dem Vorhergehenden und aus der Abbildung auf den Bündel 1 sofort ergiebt.

Durch jeden der zehn Knotenpunkte (ik) gehen sechs von den fünfzehn singulären Ebenen, z. B. durch (12) gehen die sechs Ebenen (1), (2), (123), (124), (125) und (345); dieselben liegen in einem Ebenenbüschel zweiter Ordnung (16.). In jeder von den fünfzehn singulären Ebenen liegen vier Knotenpunkte (ik), z. B. in (1) die vier Punkte (12), (13), (14), (15) und in (123) die vier Punkte (12), (23), (31) und (45). Zwei singuläre Ebenen haben entweder einen oder zwei Knotenpunkte mit einander gemein; in jeder Verbindungslinie von zwei Knotenpunkten aber schneiden sich zwei singuläre Ebenen, z. B. (1) und (123) in $\overline{(12)(13)}$, (125) und (345) in $\overline{(12)(34)}$. Die Brennfläche Φ^4 wird von den 15 singulären Ebenen in je einem Kegelschnitte berührt und in je einem zweiten geschnitten.

22. Wir wollen jetzt annehmen, dass alle Flächen des F^2-Gebüsches einem räumlichen Sechseck 1 2 3 4 5 6 oder $h\,i\,k\,l\,m\,n$ umschrieben seien. Jede durch die sechs Eckpunkte i gehende F^2 gehört dann zu dem Gebüsch. Die Kernfläche K^4 desselben geht folglich durch die

*) Vgl. *Kummer* a. a. O. S. 71.

15 Kanten $\overline{ik}$ des Sechsecks und durch die 10 Doppellinien seiner zehn Paar Gegenebenen $\overline{hik}$, $\overline{lmn}$; sie geht ausserdem durch die Raumcurve dritter Ordnung k^3, welche dem Sechseck umschrieben werden kann. Der Punkt (0) des Raumes Σ_1, welcher einem beliebigen Punkte dieser Raumcurve k^3 entspricht, muss allen Punkten von k^3 entsprechen, weil jeder durch (0) gehenden Ebene φ_1 von Σ_1 eine F^2 des Gebüsches entspricht, welche durch sieben und folglich durch alle Punkte von k^3 geht. Jedem durch (0) gehenden Strahle von φ_1 entspricht ausser k^3 eine auf dieser F^2 liegende Sehne von k^3. Das Sehnensystem von k^3 ist demnach projectiv auf den Strahlenbündel (0) bezogen, und zwar so, dass alle die collinearen Strahlenbündel, durch welche es aus den verschiedenen Punkten von k^3 projicirt wird*), reciprok auf den Bündel (0) bezogen sind. Den Tangenten von k^3 entsprechen folglich im Bündel (0) die Strahlen einer Kegelfläche zweiter Ordnung, und den durch k^3 gehenden Kegelflächen des Gebüsches, weil sie nur je eine Tangente von k^3 enthalten, die Berührungsebenen dieser Kegelfläche (0). Auch leuchtet ein, dass die Tangenten und Punkte von k^3 auf die Strahlen und Berührungsebenen der Kegelfläche (0) projectiv bezogen sind.

23. Jede Sehne der Raumcurve k^3 ist ein Hauptstrahl des Gebüsches und der k^3 associirt (2.); ihre beiden sich selbst associirten Punkte sind conjugirt bezüglich aller Flächen des Gebüsches, also auch in Bezug auf k^3. Die Kernfläche K^4 wird folglich von den Sehnen der k^3 in je vier harmonischen Punkten geschnitten, von den Tangenten dieser Raumcurve aber osculirt, so dass k^3 eine Haupttangentencurve von K^4 ist. Der Punkt (0) ist deshalb ein Knotenpunkt der Fläche Φ^4, und sein Tangentenkegel ist der vorhin (22.) erwähnte Kegel zweiter Ordnung (0). Ausserdem hat Φ^4 noch 15 Knotenpunkte (ik), welche den 15 Kanten $\overline{ik}$ des Sechsecks entsprechen.

24. Alle Doppeltangenten der Fläche Φ^4, welche den Strahlen des Punktes 1 im vorliegenden Falle entsprechen, bilden *ein Strahlensystem* I *zweiter Classe zweiter Ordnung***). Dasselbe kann auf fünf Arten durch eine

*) Vgl. meine „Geometrie der Lage“, II. Abth., S. 74.
**) Vgl. *Kummer* a. a. O. S. 52.

Regelschaar beschrieben werden und enthält die Erzeugenden von doppelt unendlich vielen geradlinigen F^3 (14.). Seine Brennfläche Φ^4 ist eine *Kummer*sche Fläche vierter Classe und vierter Ordnung und zugleich von fünf anderen, gleichartigen Strahlensystemen II, III, IV, V, VI die Brennfläche. Sie ist auf die Kernfläche K^4 eindeutig abgebildet (3.); wie K^4 von den Coordinaten der sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, so hängt auch sie von achtzehn Constanten ab und ist die allgemeine *Kummer*sche Fläche.

Das Strahlensystem I hat 16 singuläre Ebenen; sechs derselben (i) entsprechen den sechs Kegelflächen des Gebüsches, durch welche die Raumcurve k^3 aus den Eckpunkten $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ des Sechsecks projicirt wird, die übrigen zehn $(i\,k\,l)$ entsprechen den zehn Ebenenpaaren des Sechsecks. Dem Ebenenpaare $\overline{123}$, $\overline{456}$ z. B. entspricht die singuläre Ebene (123), welche auch mit (456), (213), (231) u. s. w. bezeichnet werden kann. Von dem Strahlensysteme I enthält jede der 16 singulären Ebenen einen gewöhnlichen Strahlenbüschel; der Mittelpunkt des in $(1\,k\,l)$ liegenden Büschels ist $(k\,l)$ und derjenige des in (i) liegenden Büschels ist $(1\,i)$ für $i > 1$ und (0) für $i = 1$.

25. Die *Kummer*sche Fläche Φ^4 hat sechzehn Knotenpunkte (0) und $(i\,k)$ und sechzehn singuläre Ebenen (i) und $(i\,k\,l)$*), welche (nach 24.) durch das Strahlensystem I einander zugeordnet sind wie folgt:

Knotenpunkte: (0) (12) (13) (14) (15) (16) (23) (24) ····· (46) (56)
sing. Ebenen: (1) (2) (3) (4) (5) (6) (123) (124) ····· (146) (156).

Die sechs Ebenen (1), (2), (3), (4), (5), (6) gehen durch den Knotenpunkt (0); sie bilden ein Sechsseit, welches einer Kegelfläche zweiter Ordnung umschrieben und auf das Sechseck 1 2 3 4 5 6 in der Raumcurve k^3 projectiv bezogen ist (22.), so dass:

$$(1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6) \;\overline{\wedge}\; k^3\,(1\,2\,3\,4\,5\,6).$$

---

*) Zu der obigen, die Auffassung sehr erleichternden Bezeichnung der 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen der *Kummer*schen Fläche ist zuerst Herr *H. Weber* (in diesem Journal Bd. 84, S. 343) gelangt bei einer Untersuchung über die Charakteristiken der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen. Dass sich diese Bezeichnung ungesucht auch aus der rein geometrischen Beziehung zu dem räumlichen Sechseck 123456 ergiebt, ist gewiss ein bemerkenswerthes Zusammentreffen.

Auch durch jeden der übrigen fünfzehn Knotenpunkte (*ik*) gehen sechs von den 16 singulären Ebenen; dieselben berühren ebenfalls eine Kegelfläche zweiter Ordnung (16.) und können durch (*ik*1), (*ik*2), (*ik*3), (*ik*4), (*ik*5), (*ik*6) bezeichnet werden, wenn (*ikk*) die Ebene (*i*) und (*iki*) die Ebene (*k*) bedeutet. Durch den Knotenpunkt (12) z. B. gehen die sechs Ebenen (2), (1), (123), (124), (125) und (126), weil die ihnen entsprechenden Flächen des F^2-Gebüsches durch die Sechseck-Kante $\overline{12}$ gehen.

26. In jeder der sechzehn singulären Ebenen liegen sechs von den sechzehn Knotenpunkten; z. B. in (*i*) liegen die Knotenpunkte (*i*1), (*i*2), (*i*3), (*i*4), (*i*5), (*i*6), wenn (*ii*) den Punkt (0) bedeutet, und in der Ebene (123) = (456) liegen die sechs Punkte (23), (31), (12), (56), (64), (45), wie aus der Beziehung von Σ zu Σ_1 ohne Weiteres folgt. Der Kegelschnitt, längs welchem die Fläche Φ^4 von der singulären Ebene (123) oder allgemeiner (*ikl*) berührt wird, geht durch die sechs in der Ebene liegenden Knotenpunkte; ihm entspricht nämlich die Doppellinie eines Ebenenpaares von Σ (9.), und diese schneidet die sechs den Knotenpunkten entsprechenden Sechseck-Kanten.

Die 120 Verbindungslinien der 16 Knotenpunkte sind identisch mit den 120 Schnittlinien der 16 singulären Ebenen. Denn z. B. (0) und (12) liegen beide auf (1) und (2); (12) und (13) liegen auf (1) und (123); ebenso (12) und (34) auf (125) = (346) und zugleich auf (126) = (345).

27. Der Strahlenbündel *i* ist (nach 11.) collinear auf die Ebene (*i*) bezogen, wenn man jedem Strahle von *i* den Punkt zuweist, in welchem (*i*) von der entsprechenden Geraden des Raumes Σ_1 geschnitten wird. Bezieht man anderseits die Bündel 1, 2, 3, 4, 5, 6 perspectiv auf das Sehnensystem der Raumcurve k^3 und somit collinear auf einander, so sind sie (22.) reciprok auf den Strahlenbündel (0) bezogen. Auf diese Weise werden folglich die Ebenen (1), (2), (3), (4), (5), (6) collinear auf einander und reciprok auf den Bündel (0) bezogen; und zwar liegt jeder Strahl des Strahlensystemes I in derjenigen Ebene von (0), welche dem Schnittpunkte des Strahles mit der Ebene (1) entspricht, und jeder Strahl von (1), welcher durch den Punkt (0) geht, fällt folglich mit dem ihm entsprechenden Strahle des Bündels (0) zusammen.

Alle Geraden des Raumes Σ_1, welche in je einer Ebene ε_1 von (0)

liegen und zugleich durch den entsprechenden Punkt E_1 von (1) gehen, bilden einen linearen Strahlencomplex. Denn diejenigen von ihnen, welche durch einen beliebigen Punkt P_1 gehen, bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel π_1, weil sie die Ebene (1) auf der dem Strahle $\overline{(0)P_1}$ entsprechenden Geraden schneiden. Zu dem Complexe gehören alle Strahlen des Systemes I; in dem Nullsysteme, aus dessen Leitstrahlen es besteht, ist demnach jeder Strahl des Systemes I sich selbst zugeordnet, und jeder Punkt P_1 ist der Verbindungsebene π_1 der beiden durch P_1 gehenden Strahlen von I zugeordnet.

28. Die sechs Strahlensysteme zweiter Classe zweiter Ordnung I, II, ..., VI, welche den sechs Strahlenbündeln 1, 2, ..., 6 von Σ entsprechen, bestimmen (27.) sechs verschiedene Nullsysteme*). Die gemeinschaftliche Brennfläche Φ^4 der sechs Strahlensysteme ist in jedem dieser Nullsysteme sich selbst zugeordnet, so dass jeder Ebene dieser *Kummer*schen Fläche ein in ihr liegender Punkt von Φ^4, jeder singulären Ebene aber ein Knotenpunkt zugeordnet ist. Die Zuordnung der 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen in dem ersten dieser sechs Nullsysteme ist aus einer früher (25.) aufgestellten Tabelle ersichtlich; in dem $i$ten der sechs Nullsysteme ist dem Knotenpunkte (kl) die Ebene (ikl) zugeordnet, weil durch (kl) alle in (ikl) liegenden Strahlen des $i$ten Strahlensystemes gehen (vgl. 24.). Verbindet man die sechs Punkte, welche einer beliebigen Berührungsebene von Φ^4 in den sechs Nullsystemen zugeordnet sind, mit dem Berührungspunkte der Ebene, so erhält man die sechs in der Ebene liegenden Doppeltangenten von Φ^4; ihrem Berührungspunkte ist die Ebene im Allgemeinen nicht zugeordnet.

29. Dem Sechsseit (1) (2) (3) (4) (5) (6), welches (25.) zu dem Sechseck 1 2 3 4 5 6 auf k^3 projectiv und einer Kegelfläche zweiter Ordnung umschrieben ist, ist in dem $i$ten der sechs Nullsysteme das Sechseck $(i1)$ $(i2)$ $(i3)$ $(i4)$ $(i5)$ $(i6)$ zugeordnet. Dasselbe ist deshalb einem Kegelschnitt so eingeschrieben, dass:

$$(i1)\ (i2)\ (i3)\ (i4)\ (i5)\ (i6)\ \barwedge\ k^3\ (1\,2\,3\,4\,5\,6), \text{ für } (ii) = (0).$$

*) Auf diese sechs Nullsysteme oder linearen „Fundamental-Complexe" hat (in den Math. Annalen II, S. 199—226) zuerst Herr *F. Klein* aufmerksam gemacht, von welchem auch die meisten Theoreme der folgenden Nummern herrühren.

In dem $k$ten der sechs Nullsysteme ist aber (28.) dieses Sechseck dem Sechsseit $(ik1)(ik2)(ik3)(ik4)(ik5)(ik6)$ zugeordnet, welches folglich ebenfalls zu k^3 (1 2 3 4 5 6) projectiv ist. Und weil diesem Sechsseit, wenn beispielsweise $i=2$, $k=3$ gesetzt wird, in dem ersten Nullsysteme das Sechseck (23) (31) (12) (56) (64) (45) zugeordnet ist, so muss auch letzteres zu k^3 (1 2 3 4 5 6) projectiv sein. Ueberhaupt sind alle Gruppen von je sechs singulären Ebenen, die durch einen Knotenpunkt gehen, und alle Gruppen von je sechs Knotenpunkten, die in einer singulären Ebene liegen, zu einander und zu dem Sechseck 1 2 3 4 5 6 auf k^3 projectiv.

30. Die 16 Knotenpunkte der *Kummer*schen Fläche Φ^4 liegen (nach 26. und 29.) zu sechsen in den 16 Kegelschnitten, längs welchen Φ^4 von den 16 singulären Ebenen berührt wird. Da je zwei dieser Kegelschnitte sich in zwei Knotenpunkten schneiden (26.), so können sie mit jedem nicht auf ihnen liegenden Knotenpunkte durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden; diese F^2 aber geht durch noch einen zwölften Knotenpunkt und durch vier von den 16 Kegelschnitten. So z. B. liegen die zwölf Knotenpunkte der vier Kegelschnitte (1), (2), (134), (234) auf einer F^2, ebenso diejenigen von (123), (345), (561) und (246). Ueberhaupt giebt es sechzig Flächen zweiter Ordnung, welche je zwölf Knotenpunkte und je vier von den 16 Berührungs-Kegelschnitten enthalten, und ebenso sechzig Flächen zweiter Classe, welche je zwölf singuläre Ebenen berühren. Z. B. die 12 singulären Ebenen, welche durch (0), (12), (34), (56) oder durch (12), (23), (34), (41) gehen, berühren eine Fläche zweiter Classe.

31. Die beiden Punkte, welche einer Ebene in irgend zwei von den sechs Nullsystemen zugeordnet sind, sind homologe Punkte von zwei collinearen Räumen; letztere aber liegen involutorisch, weil die beiden Punkte einander in doppelter Weise entsprechen. Denn z. B. in den ersten beiden Nullsystemen sind $(1i)$ und $(2i)$ der Ebene (i), zugleich aber $(2i)$ und $(1i)$ der Ebene $(12i)$ zugeordnet; ferner (34) und (56) der Ebene $(134)=(256)$ und umgekehrt (56) und (34) der Ebene $(156)=(234)$. Die acht Punktenpaare (12) (0), (13) (23), (14) (24), (15) (25), (16) (26), (34) (56), (35) (46) und (36) (45) bestehen demnach aus je zwei zugeordneten Punkten eines geschaart-involutorischen Systemes I II, in welchem

jeder gemeinschaftliche Leitstrahl der ersten beiden Nullsysteme sich selbst, und die Ebene $(1ik)$ der Ebene $(2ik)$ zugeordnet ist. Solcher involutorischen Systeme giebt es fünfzehn, die wir mit I II, I III, ... , V VI bezeichnen. In jedem derselben ist die *Kummer*sche Fläche Φ^4 sich selbst zugeordnet, und zwar sind je zwei zugeordnete Punkte oder Ebenen der Fläche durch die beiden windschiefen Axen des Systemes harmonisch getrennt. Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, welches aus den sich selbst zugeordneten Strahlen eines dieser involutorischen Systeme besteht, wird von zwei der collinearen Ebenen (i) erzeugt (vgl. 27.).

32. Welcher Knotenpunkt von Φ^4 einer beliebigen singulären Ebene in jedem der sechs Nullsysteme I, II, III, IV, V, VI, oder einem beliebigen Knotenpunkte in jedem der fünfzehn involutorischen Systeme zugeordnet ist, ersieht man sofort aus der folgenden Tabelle (vgl. 28. und 31.):

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(123)	(124)	(125)	(126)	(134)	(135)	(136)	(145)	(146)	(156)
I.	(0)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(23)	(24)	(25)	(26)	(34)	(35)	(36)	(45)	(46)	(56)
II.	(12)	(0)	(23)	(24)	(25)	(26)	(13)	(14)	(15)	(16)	(56)	(46)	(45)	(36)	(35)	(34)
III.	(13)	(23)	(0)	(34)	(35)	(36)	(12)	(56)	(46)	(45)	(14)	(15)	(16)	(26)	(25)	(24)
IV.	(14)	(24)	(34)	(0)	(45)	(46)	(56)	(12)	(36)	(35)	(13)	(26)	(25)	(15)	(16)	(23)
V.	(15)	(25)	(35)	(45)	(0)	(56)	(46)	(36)	(12)	(34)	(26)	(13)	(24)	(14)	(23)	(16)
VI.	(16)	(26)	(36)	(46)	(56)	(0)	(45)	(35)	(34)	(12)	(25)	(24)	(13)	(23)	(14)	(15).

Z. B. der Ebene (136) ist in dem IV. Nullsysteme der Knotenpunkt (25) und im VI. der Punkt (13) zugeordnet; diese Punkte (25) und (13) aber entsprechen einander doppelt in dem involutorischen Systeme IV VI. Auch die projective Beziehung der in zwei singulären Ebenen liegenden Gruppen von je sechs Knotenpunkten (29.) ist aus der Tabelle leicht zu ersehen; z. B. in den Ebenen (1), (123) und (135) ist:

$$(0)\,(12)\,(13)\,(14)\,(15)\,(16) \barwedge (23)\,(31)\,(12)\,(56)\,(64)\,(45) \barwedge (35)\,(46)\,(51)\,(62)\,(13)\,(24).$$

Den wichtigen Satz des Herrn *H. Weber**), dass aus sechs passend gewählten Knotenpunkten, z. B. aus (12), (23), (34), (45), (51), (0) oder

*) In diesem Journal Bd. 84, S. 349.

aus (23), (31), (12), (14), (25), (36), alle singulären Ebenen und die übrigen zehn Knotenpunkte linear construirt werden können, beweist man ebenfalls leicht mit Hülfe der Tabelle (vgl. No. 25. und 26.).

33. Drei beliebige von den sechs Nullsystemen, z. B. I, II und III, bestimmen drei involutorische Systeme II III, III I und I II, ausserdem aber ein räumliches Polarsystem I II III. Sucht man nämlich zu irgend einem Elemente des Raumes die zugeordneten in I und II III, oder in II und III I oder in III und I II, so erhält man homologe Elemente von zwei reciproken Räumen; diese Räume aber liegen involutorisch und bilden ein räumliches Polarsystem I II III, weil unserer Tabelle zufolge den Eckpunkten der acht Tetraëder:

(0) (12) (23) (31), (0) (45) (56) (64), (23) (14) (15) (16), (56) (41) (42) (43),
(31) (24) (25) (26), (64) (51) (52) (53), (12) (34) (35) (36) und (45) (61) (62) (63)

die ihnen gegenüberliegenden Flächen entsprechen. Diese Tetraëder sind nicht blos von I II III, sondern auch von dem Polarsysteme IV V VI acht Poltetraëder, und das letztere Polarsystem ist folglich mit I II III identisch. Ebenso sind I II IV und III V VI zwei identische Polarsysteme; man erhält acht Poltetraëder derselben, wenn man in den vorstehenden Tetraëder-Ausdrücken die Ziffern 3 und 4 vertauscht. Ueberhaupt bestimmen die sechs Nullsysteme zu dreien zehn verschiedene Polarsysteme; in jedem derselben ist die *Kummer*sche Fläche Φ^4 sich selbst zugeordnet, ihre 16 Knotenpunkte sind die Pole ihrer singulären Ebenen und bilden zu vieren acht Poltetraëder.

34. Die Ordnungsfläche des Polarsystemes I II III enthält alle Strahlen, welche in jedem der drei Nullsysteme I, II und III sich selbst zugeordnet sind, und folglich auch die drei Paar Axen der involutorischen Systeme II III, III I und I II; denn diese Axen sind Leitstrahlen der von jenen Strahlen gebildeten Regelschaar. Ebenso enthält die Ordnungsfläche alle in IV, V und VI sich selbst zugeordneten Strahlen. Dieselben bilden die Leitschaar der vorigen Regelschaar; denn wenn beide Regelschaaren identisch wären, so gäbe es unendlich viele, in allen sechs Nullsystemen sich selbst zugeordnete Strahlen, und die zehn durch die Nullsysteme bestimmten Polarsysteme hätten identische Ordnungsflächen, während sie doch von einander verschieden sind (33.). Die beiden Axen von II III sind

folglich in jedem der Nullsysteme IV, V, VI (und I) sich selbst zugeordnet und schneiden die Axenpaare der sechs involutorischen Systeme IV V, IV VI, ... , VI I. Die Axenpaare von je drei involutorischen Systemen, welche (wie I II, III IV und V VI) zusammen von allen sechs Nullsystemen abhängen, bilden demnach die drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders. Uebrigens hat entweder eines oder jedes der drei Systeme II III, III I, I II zwei imaginäre Axen, weil die Ordnungsfläche des Polarsystemes I II III, wenn sie reell und geradlinig ist, nur von zwei Paar Kanten eines Poltetraëders des Systemes in reellen Punkten geschnitten wird (vgl. 35.).

35. In Bezug auf irgend drei von den sechs Nullsystemen, z. B. I, II und III, gruppiren sich die Punkte und Ebenen des Raumes zu Poltetraëdern eines räumlichen Polarsystemes I II III = IV V VI; und zwar sind (33.) jedem Eckpunkte eines solchen Tetraëders in den drei involutorischen Systemen II III, III I, I II die übrigen drei Eckpunkte und in den drei Nullsystemen die durch ihn gehenden Tetraëderflächen zugeordnet, und Analoges gilt von jeder Tetraëderfläche. In Bezug auf die drei Nullsysteme IV, V, VI gruppiren sich die Punkte und Ebenen zu *anderen* Poltetraëdern desselben Polarsystemes. Zwei Tetraëder, welche diesen beiden verschiedenen Gruppirungen angehören und eine gemeinschaftliche Fläche besitzen, haben auch den gegenüberliegenden Eckpunkt mit einander gemein, und ihre anderen sechs Eckpunkte, welche jener Fläche in den sechs Nullsystemen zugeordnet sind, bilden zwei Poldreiecke eines in I II III enthaltenen ebenen Polarsystemes und liegen folglich auf einem Kegelschnitt. In den sechs Nullsystemen sind sonach einer beliebigen Ebene sechs Punkte eines Kegelschnittes zugeordnet und einem beliebigen Punkte sechs durch ihn gehende Ebenen eines Büschels zweiter Ordnung.

36. Ein beliebiger Punkt des Raumes bildet mit den fünfzehn Punkten, welche ihm in den fünfzehn involutorischen Systemen zugeordnet sind, eine ähnliche Gruppe von 16 Punkten, wie die 16 Knotenpunkte der *Kummer*schen Fläche. Die 16 Punkte dieser Gruppe liegen nämlich zu sechsen auf 16 Ebenen (genauer: Kegelschnitten), welche ihrerseits zu sechsen durch die 16 Punkte gehen. In den sechs Nullsystemen sind (35.) jedem der 16 Punkte die sechs durch ihn gehenden Ebenen zugeordnet, und jeder der 16 Ebenen die sechs auf ihr liegenden Punkte; in

den zehn Polarsystemen sind jedem der 16 Punkte die zehn nicht durch ihn gehenden Ebenen, und jeder der 16 Ebenen die zehn nicht auf ihr liegenden Punkte zugeordnet; in den fünfzehn involutorischen Systemen endlich sind jedem der 16 Punkte oder Ebenen der Gruppe die 15 übrigen zugeordnet. Die 16 Punkte sind, wie leicht einzusehen ist, die Knotenpunkte einer durch sie bestimmten *Kummer*schen Fläche, welche ebenso wie Φ^4 in jedem der sechs Nullsysteme sich selbst zugeordnet ist. Mit Φ^4 zugleich sind demnach dreifach unendlich viele *Kummer*sche Flächen bestimmt.

37. Das F^2-Gebüsch Σ, durch welches wir zu der *Kummer*schen Fläche Φ^4 gelangt sind, ist bestimmt durch vier seiner Flächen, von welchen drei beliebig durch die Raumcurve k^3 dritter Ordnung gehen; von der vierten wird k^3 in den sechs Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 geschnitten. Jenachdem nun keine, zwei, vier oder sechs von diesen Schnittpunkten reell sind, werden von den sechs zu der *Kummer*schen Fläche gehörigen Strahlensystemen zweiter Classe und zweiter Ordnung keine, zwei, vier oder alle sechs reell*). Der letzte dieser vier Fälle, zwischen denen eine Anzahl geometrisch evidenter Uebergangsfälle und Ausartungen stehen, liegt den obigen Betrachtungen zu Grunde. Da die Verbindungslinie von zwei conjugirt-imaginären Punkten reell ist, so hat das Sechseck 1 2 3 4 5 6 in den beiden ersten Fällen drei und im dritten Falle sieben reelle Kanten; die *Kummer*sche Fläche hat demgemäss im ersten und zweiten Falle vier, und im dritten Falle acht reelle Knotenpunkte und singuläre Berührungsebenen. In dem ersten Falle, von welchem die *Fresnel*sche Wellenfläche ein ziemlich specielles Beispiel ist, entsprechen die vier reellen singulären Ebenen vier imaginären Ebenenpaaren von Σ, deren Doppellinien reell sind; sie gehen, wie sich daraus leicht ergiebt, durch keinen der vier reellen Knotenpunkte. In dem zweiten Falle entsprechen zwei reelle singuläre Ebenen den beiden reellen Ebenenpaaren des Sechsecks 1 2 3 4 5 6, und die beiden anderen den zwei Kegelflächen, durch welche k^3 aus den beiden reellen Eckpunkten projicirt wird; die ersteren beiden singulären

*) Vgl. die Mittheilung des Herrn *F. Klein* in der Münchener Naturforscher-Versammlung von 1877 („Amtlicher Bericht“ S. 95).

Ebenen schneiden sich demnach in zwei von den vier reellen Knotenpunkten und die letzteren in den beiden anderen. In dem dritten Falle liegen die acht reellen Knotenpunkte zu vieren in den acht reellen singulären Ebenen, und die letzteren gehen zu vieren durch die ersteren, wie sofort einleuchtet.

Strassburg i. E., den 10. April 1878.

Die Abbildung von Kegelschnitten auf Kreisen.

(Von Herrn *Milinowski* zu Weissenburg im Elsass.)

Die Frage der Einführung der Kegelschnitte in die Gymnasien, die in neuerer Zeit vielfach discutirt worden ist, hat das Bedürfniss hervorgerufen, die harmonischen und Polareigenschaften, sowie die Sätze von *Pascal* und *Brianchon* für Kegelschnitte auf elementarem Wege abzuleiten. Die von Herrn *Geiser* herausgegebenen Vorlesungen *Steiners* über synthetische Geometrie, zusammengefasst unter dem Titel „die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung“ enthalten eine Ableitung der genannten Eigenschaften und Sätze nur mit Hilfe des Kegels, nicht durch blosse Betrachtungen in der Ebene, und auch anderweit ist eine solche, soviel bekannt, nicht gegeben. Für die Parabel hat eine kleine Schrift „die Kegelschnitte für die Repetition in der Gymnasialprima, behandelt von Dr. *Max Simon*, I. Abtheilung: die Parabel“, die Polareigenschaften, jedoch nicht mehr die Sätze von *Pascal* und *Brianchon* bewiesen. Im Folgenden werden durch die Abbildung der Kegelschnitte auf einem Kreise elementare Ableitungen jener Sätze mitgetheilt.

I. Gegeben seien ein Punkt F und ein Kreis K' mit dem Mittelpunkt F' und dem Radius $2a$; der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Berührungskreises an K', der durch F geht, ist ein Centralkegelschnitt K mit den Brennpunkten F und F' und der grossen Achse $2a$. Beschreibt man um die Punkte einer Geraden l mit ihren Entfernungen von F Kreise, so bilden diese einen Büschel, dessen Grundpunkte F und F_1 sind, letzterer der Gegenpunkt von F für l. Unter diesen Kreisen giebt es zwei, welche K' berühren; ihre Mittelpunkte seien A und B, ihre Berührungspunkte A' und B'; es liegen natürlich $AA'F'$ und $BB'F'$ je in einer Geraden. *Wir nennen A' und B' die Bilder von A und B.*

Die Senkrechten von A auf FA' und von B auf FB' sind Tangenten an K; sie schneiden sich in C, und der um C mit CF beschriebene Kreis trifft K' in A' und B'. Legt man durch C eine beliebige Gerade g, welche K in D und E schneidet, dann gehören die um C, D, E mit CF, DF, EF beschriebenen Kreise einem Büschel an, und da die letzteren K' in D', E' berühren, so sind $D'E'$ durch $A'B'$ harmonisch getrennt. Hieraus folgt: *Zieht man durch einen beliebigen Punkt C an K die Tangenten CA, CB und die Secante CDE, so sind die Bilder $A'B'$ der Berührungspunkte durch die Bilder $D'E'$ der Schnittpunkte harmonisch getrennt*, und *die Tangenten in D und E an K schneiden sich auf AB in G*; denn schneidet die Tangente in D die l in G, so muss die Tangente von G an K durch E gehen, weil die Bilder A' B' durch die Bilder der Berührungspunkte harmonisch getrennt sind.

Wir schneiden K und K' durch CF' in HJ und $H'J'$, so sind die letzten Punkte durch $A'B'$ harmonisch getrennt, es müssen sich also die Tangenten in $A'B'$ an K' auf CF' schneiden; *wir nennen den Schnittpunkt C' derselben das Bild von C und haben damit das Princip gewonnen, die Ebene auf sich selbst abzubilden.* — Die Tangenten in $D'E'$ müssen sich in einem Punkt G' von GF' schneiden; da aber $A'B'$ durch $D'E'$ harmonisch getrennt sind, so liegt G' auf $A'B'$ und C' auf $D'E'$, d. h. *die Bilder aller Punkte, von denen sich Tangenten an K ziehen lassen und die auf einer Geraden l liegen, welche K in AB schneidet, liegen wieder auf einer Geraden l', welche K' in den Bildern $A'B'$ von AB schneidet. Wir nennen l' das Bild von l.*

Durch C ziehen wir eine Gerade a, welche K in LM trifft, schneiden K mit GL und GM in N und O, so müssen CNO in einer Geraden liegen; denn nach dem letzten Satze liegen, wenn $L'M'N'O'$ die Bilder von $LMNO$ sind, $C'L'M'$, $G'L'N'$, $G'M'O'$ je auf einer Geraden, und da deshalb nach einem bekannten Satze vom Kreise auch $C'N'O'$ in einer Geraden sich befinden, so müssen dies auch CNO thun. Wir nennen noch P den Schnittpunkt von LO und MN und GP *die Polare von C, CP diejenige von G.* Es mögen sich noch $L'O'$ und $M'N'$ in P' schneiden. Sind RS und $R'S'$ die Schnittpunkte von CP und $C'P'$ mit K und K', so sind $F'(RSCP)$ und $F'(R'S'C'P')$ harmonische Büschel, von

deren Strahlen $F'R$ und $F'R'$, $F'S$ und $F'S'$, $F'C$ und $F'C'$ und daher auch $F'P$ und $F'P'$ zusammenfallen; es liegen also $PP'F'$ in einer Geraden. *Daher nennen wir P' das Bild von P und haben somit auch alle diejenigen Punkte abgebildet, von denen sich Tangenten an K nicht ziehen lassen.* Es folgt: *Liegen auf einer Geraden l, welche K schneidet, 4 harmonische Punkte, so sind ihre Bilder auch 4 harmonische Punkte auf l'.*

Der Punkt P ist der Schnittpunkt von AB und DE, wie sich unmittelbar aus den Eigenschaften des vollständigen Vierseits ergiebt. Daraus ergiebt sich ferner, dass jede durch P gezogene Sehne von P und der Geraden CG harmonisch getheilt wird. *Wir nennen CG die Polare von P*; (von P lassen sich keine Tangenten an K ziehen). Die Bilder aller Punkte von CG liegen so, dass sie mit P' alle durch P' gezogenen Sehnen harmonisch theilen, also auf der Geraden $C'G'$. Nun ergeben sich ganz allgemein die Sätze: *Die Bilder aller Punkte einer Geraden liegen wieder auf einer Geraden, dem Bilde der ersten; die Bilder aller Geraden durch einen Punkt schneiden sich im Bilde des Punktes; die Bilder von 4 harmonischen Elementen sind wieder harmonisch, diejenigen von Pol und Polare auch Pol und Polare.* Hieraus folgen für den Kegelschnitt K die Sätze, sofern man sie als bewiesen für den Kreis annimmt: 1) *Die Polaren von 4 harmonischen Punkten sind harmonische Strahlen;* 2) *der Satz von Pascal;* 3) *der Satz von Brianchon.*

II. Eine andere ebenso einfache Methode zur Herleitung beruht auf einer bekannten Construction der Tangenten von einem Punkt A an einen Centralkegelschnitt K. Ist F der eine Brennpunkt desselben, so beschreibe man über der grossen Achse als Durchmesser den Kreis K' und ebenso über AF als Durchmesser den Kreis α, welcher K' in $A'_1 A'_2$ schneidet; dann sind AA'_1 und AA'_2 die Tangenten von A an K. Es mögen sich die Tangenten in $A'_1 A'_2$ an K' in A' treffen; *wir nennen A' das Bild von A.* Liegt A auf K, so liegt A' auf K', nämlich in demjenigen Punkte, in welchem der Kreis α den Kreis K' berührt. Der Punkt A bewege sich auf einer Geraden l, von der angenommen werden soll, dass sie K nicht schneide; alle Kreise α bilden einen Büschel, dessen Grundpunkte F und der Fusspunkt F_1 des von F auf l gefällten Perpendikels sind. Daher laufen alle Geraden $A'_1 A'_2$ durch einen Punkt L', und

die Schnittpunkte A' der Tangenten in $A_1'A_2'$ liegen auf einer Geraden l', der Polare von L' für K'. *Wir nennen l' das Bild von l.* Auf l seien $BCDE$ 4 harmonische Punkte; dann sind $F(BCDE)$ 4 harmonische Strahlen. Die Mitten 𝔅ℭ𝔇𝔈 der Strecken FB, FC, FD, FE, liegen sämmtlich auf einer Geraden, der Centrale des Kreisbüschels $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$; daher sind M(𝔅ℭ𝔇𝔈) harmonische Strahlen, wenn M der gemeinsame Mittelpunkt von K und K' ist. Diese 4 Strahlen stehen auf den 4 Potenzlinien der Kreise $\beta\gamma\delta\varepsilon$ mit dem Kreise K' senkrecht, also sind auch diese 4 harmonische Strahlen, ihre Pole $B'C'D'E'$ daher 4 harmonische Punkte. Es folgt: *Sind $BCDE$ 4 solche harmonische Punkte einer Geraden l, von denen sich Tangenten an K ziehen lassen, so sind die Bilder $B'C'D'E'$ auch 4 harmonische Punkte.*

Um das Bild eines Punktes A zu construiren, hat man über AF als Durchmesser einen Kreis α zu zeichnen und in seinen Schnittpunkten mit K' die Tangenten zu ziehen, deren Durchschnitt A' das Bild von A ist, d. h. A' ist der Pol der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise α und K'. Liegt A so, dass sich von ihm keine Tangenten an K ziehen lassen, so construire man über AF als Durchmesser den Kreis α und den Pol A' der Potenzlinie der Kreise K' und α; dieser ist das Bild von A. Wie vorher beweist sich nun ganz allgemein: *Die Bilder von 4 harmonischen Punkten oder Strahlen sind wieder harmonisch.* Hieraus folgen aber die Polareigenschaften und der Satz von *Pascal.* — *Das Bild der unendlich entfernten Geraden ist die Leitlinie, das Bild des Mittelpunktes der Brennpunkt F; die Bilder der Endpunkte der grossen Achse und des Schnittpunktes der Leitlinie mit der kleinen Achse von K fallen mit diesen Punkten zusammen;* sonst giebt es keinen Punkt, der mit seinem Bilde zusammenfällt.

III. Eine dritte Art der Abbildung der Centralkegelschnitte beruht für die Ellipse auf dem bekannten Satze: „Construirt man über der grossen Achse SS_1 einer Ellipse K mit den Halbachsen a und b den Kreis K', so verhalten sich die in einem Punkte L von SS_1 errichteten senkrechten Kreis- und Ellipsensehnen $C'C_1'$ und CC_1 wie $a:b$.

Der diesem Satze analoge für die Hyperbel scheint bis jetzt nicht bemerkt zu sein; beide Sätze lassen sich gleichzeitig auf folgende Art ableiten: Im Punkte C des Kegelschnittes K ziehe man eine Tangente,

welche die grosse Achse SS_1 in A, den Kreis K' in BB_1 trifft. Sind FF_1 die beiden Brennpunkte von K, so sind BF und B_1F_1 senkrecht auf BB_1. Verlängert man FB über B hinaus um sich selbst bis $\mathfrak{F}$, so treffen sich BB_1 und $\mathfrak{F}F_1$ im Berührungspunkt C; daher sind BB_1 durch A und C harmonisch getrennt. Von C fälle man auf SS_1 die Senkrechte CL, schneide mit ihr, falls K Ellipse ist, K' in C' oder ziehe, wenn K Hyperbel ist, von L an K' die Tangente LC', dann liegt im letzten Falle C' senkrecht über A, weil $ACBB_1$ harmonisch sind. Aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$AB : BF = AL : CL$$

$$AB_1 : B_1F_1 = AL : CL$$

und hieraus durch Zusammensetzen, da

$$AB \cdot AB_1 = AC'^2,\ BF \cdot B_1F_1 = b^2 \text{ ist},$$

$$AC' : b = AL : CL.$$

Da $\triangle\ AC'L \backsim MC'L$, wenn M der Mittelpunkt von K und K', so ist

$$AC' : AL = C'M : C'L = a : C'L,$$

also:

$$C'L : CL = a : b.$$

Für die Hyperbel: *Zieht man von einem Punkt L der grossen Achse einer Hyperbel die halbe senkrechte Hyperbelsehne CL und die Tangente LC' an K' so verhält sich $CL : C'L = b : a$.*

Hält man fest, dass C und C' auf derselben Seite der grossen Achse liegen, so ist durch die beiden genannten Sätze ein eindeutiges Entsprechen zwischen den Punkten von K und K' hergestellt und weiter eine vollständige Abbildung der K-Ebene auf die K'-Ebene begründet. Ist nämlich D ein beliebiger Punkt der Ellipsenebene, $D\mathfrak{D}$ die Senkrechte auf SS_1, D' derjenige Punkt derselben, so dass $D'\mathfrak{D} : D\mathfrak{D} = a : b$, und nennt man *$D'$ das Bild von D*, so ist die Abbildung vollzogen und zwar folgt sofort aus ähnlichen Dreiecken: Die Bilder aller Punkte einer Geraden l liegen wieder auf einer Geraden l', dem Bilde von l; l und l' schneiden sich auf der grossen Achse; die Bilder aller Geraden durch einen Punkt schneiden sich im Bilde des Punktes. — In analoger Weise wird durch den zweiten Satz die Hyperbelebene abgebildet. Ist K'' die

gleichseitige Hyperbel mit derselben grossen Achse SS_1 und schneidet man K'' mit CL in C'', so ist $C''L = C'L$, also $CL : C''L = b : a$. Die Eigenschaften von K'' ergeben sich aber aus denen des Kreises K' aus dem Umstande, dass $C'C''$ durch einen Endpunkt der grossen Achse geht und dass die aus C'' und C' gefällten Lothe die grosse Achse harmonisch theilen. Aus den Abbildungen ergeben sich die Polareigenschaften und der Satz von *Pascal*. Sind diese Sätze für die Ellipse bewiesen, so folgert man sie für die Hyperbel aus der folgenden Eigenschaft: Theilt man die grosse Achse SS_1 einer Hyperbel harmonisch in L und L_1, so dass L auf der Verlängerung liegt, errichtet in L und L_1 Lothe, von denen das erste die Hyperbel in C und D schneidet, so treffen die Geraden CS und DS das zweite Loth in den Punkten C' und D' und diese durchlaufen, wenn L und L_1 sich ändern, eine Ellipse mit der grossen Achse SS_1.

IV. Die in I. und II. entwickelten Methoden leiten für die Parabel nicht mehr den *Pascal*schen Satz ab, sondern nur die Polareigenschaften, wenn man den einen Brennpunkt ins Unendliche rücken lässt. Man kann jedoch die genannten Sätze für alle drei Kegelschnittsarten gleichzeitig aus der folgenden Definition entwickeln. Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der 2 feste Kreise K' und K'_1 mit den Radien r und r_1 und den Mittelpunkten F und F_1 berührt, ist ein Kegelschnitt K mit den Brennpunkten F und F_1. Im folgenden nehmen wir an, die Berührung geschehe bei beiden Kreisen in demselben Sinne. Sind A und B zwei Punkte von K, so lassen sich um dieselben zwei Kreise α und β beschreiben, welche K' in A' und B' berühren; diese Punkte liegen auf den Geraden FA und FB. *Wir nennen A' und B' die Bilder von A und B.* Ist $\mathfrak{A}$ der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise K' und K'_1, so lässt sich um $\mathfrak{A}$ ein Kreis $\mathfrak{K}$ beschreiben, der alle Kreise $\alpha\beta\ldots$, welche K' und K'_1 in gleichem Sinne berühren, rechtwinklig schneidet. Hieraus folgt: *Der Kegelschnitt K ist der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher einen K' von 2 festen Kreisen berührt und den anderen $\mathfrak{K}$ rechtwinklig schneidet.* Auf der Geraden AB, die wir l nennen, wählen wir beliebig G und denken um G den Kreis γ construirt, welcher $\mathfrak{K}$ rechtwinklig schneidet, so gehört er mit α und β demselben Büschel an; er treffe K' in $D'E'$, dann werden diese Punkte durch $A'B'$ harmonisch getrennt. Jede durch

G gezogene Gerade l_1 trifft K in 2 Punkten $A_1 B_1$, deren Bilder $A_1' B_1'$ auf K' durch $D'E'$ harmonisch getrennt sind; es müssen demnach $D'E'$ die Bilder der Berührungspunkte DE der von G an K gezogenen Tangenten de sein. Die Geraden $A'B'$, $A_1'B_1'$, ... schneiden sich im Pol G' der Geraden $D'E'$; *wir nennen G' das Bild von G.* — Die Kreise um die Punkte der Tangente d, welche $\mathfrak{K}$ rechtwinklig schneiden und demnach einen Büschel bilden, müssen einen Grundpunkt in D' haben; der andere D_1' muss auf $\mathfrak{A}D'$ liegen, weil $\mathfrak{K}$ sämmtliche Kreise des Büschels rechtwinklig schneidet. Da die Centrale des Büschels auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht steht, so ergiebt sich folgende Construction der Tangenten von G an K: *Man construire um G den Kreis, der $\mathfrak{K}$ rechtwinklig schneidet, bestimme seine Schnittpunkte $D'E'$ mit K' und fälle von G auf die Geraden $\mathfrak{A}D'$ und $\mathfrak{A}E'$ die Senkrechten, so sind es die Tangenten.*

Als Resultat ergiebt sich unmittelbar: *Zieht man durch einen Punkt G an K die Tangenten GD und GE und eine Secante GAB, so werden die Bilder $D'E'$ der Berührungspunkte durch die Bilder $A'B'$ der Schnittpunkte harmonisch getrennt* und hieraus: *Die Tangenten in A und B an K schneiden sich auf der Berührungssehne DE.* Die weitere Ausführung ist ganz wie in I. Lassen wir F_1 ins Unendliche rücken, so geht der Kreis K_1' in eine Gerade, der Kegelschnitt K in eine Parabel über, die sich demnach auf K' ebenso abbilden lässt, wie ein Centralkegelschnitt. Es sind somit die Polareigenschaften und der Satz von *Pascal* für alle Kegelschnitte abgeleitet.

Ist $2a$ die grosse Achse eines Kegelschnitts, so lässt sich derselbe immer als Ort des Mittelpunktes eines Kreises betrachten, welcher 2 Kreise berührt, deren Mittelpunkte die Brennpunkte sind und welche $2a$ zur Summe oder Differenz der Radien haben. Dabei kann $2a = \infty$ werden. *Somit lässt sich jeder Kegelschnitt auf irgend einem Kreise um einen seiner Brennpunkte abbilden.*

Diese Eigenschaft steht in innigem Zusammenhang mit derjenigen, *dass jeder Kegelschnitt sich in Bezug auf irgend einen Kreis um einen Brennpunkt in einen Kreis polarisiren lässt,* für die ich eine durch ihre Kürze bemerkenswerthe Ableitung mittheile.

Um den Brennpunkt F des Kegelschnittes K sei ein Kreis K' be-

schrieben, AA_1 sei eine Brennpunktssehne von K, A_2 irgend ein Punkt von K. Die Tangenten in A und A_1 treffen sich in B_1, in A und A_2 in B_2; die Polaren von $B_1 B_2 A A_1 A_2$ seien $b_1 b_2 a a_1 a_2$, und es muss $\measuredangle (b_1 a) = (b_1 a_1) = 90^\circ$ sein, da $\measuredangle B_1 FA = B_1 FA_1 = 90^\circ$ ist; ferner ist $\measuredangle A_2 FB_2 = AFB_2$, also auch $\measuredangle (b_2 a) = (b_2 a_2)$. Dreht sich nun AA_1 um F, so durchläuft B_1 die Leitlinie l von K, also dreht sich die Polare von B_1 nach K' um einen festen Punkt L. Die polarisirte Figur $\mathfrak{K}$ hat also die Eigenschaft, dass die Tangenten in den Endpunkten jeder durch L gezogenen Sehne auf dieser senkrecht stehen, und dass ferner jede Sehne mit den Tangenten in ihren Endpunkten gleiche Winkel bildet; also ist $\mathfrak{K}$ ein Kreis.

Die mitgetheilten Methoden machen die Theorie der Kegelschnitte und besonders ihre Polareigenschaften und den einen Fernblick in die projectivische Geometrie gewährenden Satz des *Pascal* in durchaus elementarer Weise, im Anschluss an die Lehre vom Kreise, unseren Schulen zugänglich.

Weissenburg, Februar 1878.

Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve.

(Von Herrn *R. Sturm* in Münster i. W.)

---

1. **B**edeuten x, y die homogenen Parameter, mit deren Hilfe alle Punkte einer Geraden auf zwei feste unter ihnen, die Grundpunkte, bezogen werden, so mögen die n Punkte, deren Parameter eine binäre Form $n$ten Grades U_n in x, y zum Verschwinden bringen, die die Form darstellenden Punkte heissen.

Es seien zwei binäre Formen $n$ten und $i$ten Grades

$$U_n = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots,$$

$$V_i = b_0 x^i + \binom{i}{1} b_1 x^{i-1} y + \binom{i}{2} b_2 x^{i-2} y^2 + \cdots$$

$$(i \gtreqless n)$$

gegeben; man ersetzt in V_i die Variablen x, y durch die Differentialsymbole $\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}$, also $x^k y^{i-k}$ durch $(-1)^{i-k} \frac{d^i}{dy^k\, dx^{i-k}}$ und operirt auf U_n, so erhält man bekanntlich, wenn $i = n$ ist, eine Constante, und wenn $i < n$, eine Form $(n-i)$ten Grades W_{n-i}, welche durch *die* (*ite gemischte*) *Polare der i Punkte V_i in Bezug auf die n Punkte U_n**) dargestellt wird. Vereinigen sich die i Punkte V_i in einen, O, so sind die W_{n-i} die harmonischen Mittelpunkte $(n-i)$ten Grades von O oder bilden die reine $i$te Polare des Punktes O, oder, wie Herr *Reye* vorschlägt, die Polare des i-fachen Punktes O in Bezug auf U_n.

---

*) Die in Klammer gesetzten Worte sind eigentlich überflüssig.

Setzt man

$$a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} - \cdots = c_k$$
$$(k \text{ von } 0 \text{ bis } n-i),$$

so ist

$$W_{n-i} = c_0 x^{n-i} + \binom{n-i}{1} c_1 x^{n-i-1} y + \binom{n-i}{2} c_2 x^{n-i-2} y^2 + \cdots.$$

Die Constante, die sich bei $i=n$ ergiebt, ist

$$c_0 = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \cdots.$$

2. Verschwinden sämmtliche Grössen c_k, so nennt man, analog zu Herrn *Reyes* Bezeichnung im ternären und quaternären Gebiete*), die Form oder Punktgruppe V_i *apolar* zu der Form oder Punktgruppe U_n.

Wenn n ungerade und $i=\frac{n+1}{2}$ ist, so giebt es nur eine einzige zu U_n apolare Form $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ten Grades, z. B. bei einer cubischen Form nur eine apolare Form zweiten Grades; die Bedingungsgleichungen sind:

$$c_0 = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0,$$
$$c_1 = a_1 b_2 - 2a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0;$$

woraus sich ergiebt:

$$b_0 : 2b_1 : b_2 = a_0 a_2 - a_1^2 : a_0 a_3 - a_1 a_2 : a_1 a_3 - a_2^2,$$

also *ist die zu U_3 apolare Form zweiten Grades die Hessesche Form H* (*Salmons* Lessons introductory to the modern higher Algebra, 3^d Edition, 1876, auf die ich mich im Folgenden stets beziehen werde, Nr. 195; sie entspricht $\frac{1}{2}\Delta$ in den „binären Formen" von *Clebsch* S. 114).

Wenn $i > \frac{n}{2}$, so ist das System der zu U_n apolaren V_i von $(2i-n-1)$-facher Unendlichkeit oder $(2i-n-1)$ter Stufe, also, wenn $i=n$, $(n-1)$ter Stufe.

Im letzteren Falle besteht nur eine Bedingung: $c_0=0$; deshalb *giebt es zu n Formen $n$ten Grades $U', U'', \cdots, U^{(n)}$ stets eine gemeinsame*

*) Dieses Journal Bd. 78 S. 104, Bd. 79 S. 163. — Mit dem Falle $i=n$, insbesondere $i=n=2$, haben sich schon früher *Hesse*, *Faure*, *Salmon*, *St. Smith*, *Picquet*, *Rosanes* beschäftigt.

apolare Form nten Grades, die dann, weil die Bedingungsgleichung der Apolarität zweier Formen in den Coefficienten jeder von ihnen linear ist, auch zu allen Formen

$$\varkappa' U' + \varkappa'' U'' + \cdots + \varkappa^{(n)} U^{(n)}$$

apolar ist, oder, was bei Formen desselben Grades das nämliche ist, zu welcher alle diese Formen apolar sind.

Diese Combinante $n$ten Grades von n Formen dieses Grades ist offenbar:

$$\begin{vmatrix} x^n, - x^{n-1} y, & x^{n-2} y^2, \cdots, & (-1)^n y^n \\ a'_n, \quad a'_{n-1}, & a'_{n-2}, \quad \cdots, & a'_0 \\ a''_n, \quad a''_{n-1}, & a''_{n-2}, \quad \cdots, & a''_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a^{(n)}_n, \quad a^{(n)}_{n-1}, & a^{(n)}_{n-2}, \quad \cdots, & a^{(n)}_0 \end{vmatrix},$$

welche, wie man durch Vergleichung der Coefficienten von x^n (was nach *Salmon* Nr. 147 genügt) findet, abgesehen von einem numerischen Factor und dem Vorzeichen, identisch ist mit:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} U'}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1} U''}{dx^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1} U^{(n)}}{dx^{n-1}} \\ \frac{d^{n-1} U'}{dx^{n-2} dy}, & \frac{d^{n-1} U''}{dx^{n-2} dy}, & \cdots, & \frac{d^{n-1} U^{(n)}}{dx^{n-2} dy} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-1} U'}{dy^{n-1}}, & \frac{d^{n-1} U''}{dy^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1} U^{(n)}}{dy^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

In dem Systeme

$$\varkappa' U' + \cdots + \varkappa^{(n)} U^{(n)}$$

giebt es bekanntlich n $n$te Potenzen; sei

$$\xi^n = \varkappa'_0 U' + \cdots + \varkappa^{(n)}_0 U^{(n)}$$

eine derselben, so zeigt sich durch Addition der mit $\varkappa''_0, \varkappa'''_0, \cdots \varkappa^{(n)}_0$ multiplicirten zweiten, dritten, $\cdots$, $n$ten Colonne zu der mit $\varkappa'_0$ multiplicirten ersten in der zweiten der eben geschriebenen Determinanten, dass ξ ein Factor jedes Elements der ersten Colonne, also auch der Determinante wird. Unsere Combinante ist demnach das Product der n linearen Formen, deren $n$te Potenzen sich im Systeme $\varkappa' U' + \cdots + \varkappa^{(n)} U^{(n)}$ befinden.

Dies hat auf einem etwas abweichenden Wege schon Herr *Rosanes* — der „conjugirt“ statt „apolar“ sagt — gefunden*) und so ausgesprochen:

„*Die zu einer Form U_n apolaren Formen V_n lassen sich auf die Form $\varkappa_1\xi_1^n+\varkappa_2\xi_2^n+\cdots+\varkappa_n\xi_n^n$ bringen, wenn $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ die (von einander verschiedenen) linearen Factoren von U_n sind, und jede Form dieses Systems $(n-1)$ter Stufe ist zu U_n apolar,*“

und dazu noch gefügt:

„*Wenn n ungerade ist, so ist U_n zu sich selbst apolar und von der Form $\varkappa_1\xi_1^n+\cdots+\varkappa_n\xi_n^n$.*“

Letzteres beruht darauf, dass dann die Invariante

$$a_n a_0-\binom{n}{1}a_{n-1}a_1+\binom{n}{2}a_{n-2}a_2-\cdots\cdot$$

identisch verschwindet (*Salmon* Nr. 140).

3. Noch nicht bemerkt aber scheint folgende Eigenschaft zu sein:

*Multiplicirt man eine Form V_i mit ihrer Polare W_{n-i} bezüglich U_n (bez. setzt man die beiden Punktgruppen V_i und W_{n-i} zusammen), so erhält man, sobald $n-i$ ungerade ist, eine zu U_n apolare Form $n$ten Grades (Gruppe von n Punkten)***).

In der That, wenn

$$\begin{aligned}
d_0&=b_0c_0,\\
\binom{n}{1}d_1&=\binom{i}{1}b_1c_0+\binom{n-i}{1}b_0c_1,\\
\binom{n}{2}d_2&=\binom{i}{2}b_2c_0+\binom{i}{1}\binom{n-i}{1}b_1c_1+\binom{n-i}{2}b_0c_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\binom{n}{n-1}d_{n-1}&=\binom{i}{1}b_{i-1}c_{n-i}+\binom{n-i}{1}b_ic_{n-i-1},\\
d_n&=b_ic_{n-i},
\end{aligned}$$

so ist

$$V_iW_{n-i}=d_0x^n+\binom{n}{1}d_1x^{n-1}y+\binom{n}{2}d_2x^{n-2}y+\cdots;$$

---

*) Dieses Journal Bd. 76, S. 315.

**) Im ternären und quaternären Gebiete besteht natürlich dieser Satz nicht, weil da V_i und W_{n-i} aus dualen Elementen erzeugt sind.

und

$$a_0 d_n - \binom{n}{1} a_1 d_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 d_{n-2} - \cdots$$
$$= c_0 c_{n-i} - \binom{n-i}{1} c_1 c_{n-i-1} + \binom{n-i}{2} c_2 c_{n-i-2} - \cdots = 0,$$

wenn $n-i$ ungerade ist.

So bildet bei einem Punktetripel U_3 ein Punktepaar V_2 mit seiner (gemischten zweiten) Polare W_1 ein in Bezug auf U_3 apolares Tripel, bei einem Punktquadrupel U_4 sowohl ein Punkt V_1 mit dem Tripel seiner (ersten) Polare W_3, als auch ein Tripel V_3 mit seiner (gemischten dritten) Polare W_1 ein in Bezug auf U_4 apolares Quadrupel.

4. Die homogenen Coordinaten der Punkte einer *cubischen Raumcurve* lassen sich, wie bekannt, als ganze Functionen dritten Grades eines Parameters (oder zweier homogenen) darstellen:

$$\varrho x_i = \alpha_i \omega^3 + \beta_i \omega^2 + \gamma_i \omega + \delta_i \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

was sich durch die Substitution

$$x_i = \alpha_i z_1 + \beta_i z_2 + \gamma_i z_3 + \delta_i z_4$$

in die einfache Form:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$$

überführen lässt*).

Wenn wir mit *Salmon-Fiedlers* anal. Geom. des Raumes 2. Aufl. Bd. I, Nr. 51 die Determinanten zweiten Grades aus den Coordinaten z_i, z'_i zweier Punkte als Coordinaten der verbindenden Geraden nehmen, also $p_{ik} = z_i z'_k - z_k z'_i$, so verhalten sich für die Gerade, welche die Punkte der cubischen Raumcurve R^3 mit den Parametern ω, ω' verbindet,

$$p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} =$$
$$\omega^2 \omega'^2 : \omega\omega' : -\omega\omega'(\omega + \omega') : \omega^2 + \omega\omega' + \omega'^2 : \omega + \omega' : 1,$$

also für die Tangente an R^3 in ω wie

$$\omega^4 : \omega^2 : -2\omega^3 : 3\omega^2 : 2\omega : 1.$$

Die Gleichung ferner der Ebene, welche die Punkte ω, ω', ω'' verbindet, ist

$$z_1 - (\omega + \omega' + \omega'') z_2 + (\omega\omega' + \omega'\omega'' + \omega''\omega) z_3 - \omega\omega'\omega'' z_4 = 0,$$

---

*) Diese einfache Darstellung der Coordinaten der Punkte einer cubischen Raumcurve findet sich zuerst fast gleichzeitig in Herrn *Cremonas* Abhandlung „Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura“ (Annali di Matematica ser. I. T. I) und bei *Joachimsthal*, dieses Journal Bd. 56 S. 44; cf. auch *Salmon-Fiedlers* Raum-Geometrie 2. Aufl. II. Nr. 77.

demnach die der Osculationsebene im Punkte ω:

$$z_1 - 3\omega z_2 + 3\omega^2 z_3 - \omega^3 z_4 = 0,$$

so dass ihre Coordinaten sich wie $1 : -3\omega : 3\omega^2 : -\omega^3$ verhalten.

Sieht man in der Gleichung der Ebene $\omega\, \omega'\, \omega''$, die sich auch so schreiben lässt:

$$z_1 - (\omega' + \omega'') z_2 + \omega' \omega'' z_3 - \omega \{z_2 - (\omega' + \omega'') z_3 + \omega' \omega'' z_4\} = 0,$$

ω als variabel an, so zeigt sich, dass der Parameter der Ebene, welche einen beweglichen Punkt ω von R^3 mit zwei festen ω', ω'' verbindet, dem Parameter des beweglichen Punktes gleich ist (*Cremona* und *Salmon-Fiedler* a. a. O.); den Ebenenbüschel durchschneiden wir nun mit einer Geraden und beziehen deren Punktreihe so auf zwei Grundpunkte, dass Ebene und Schnittpunkt, also auch je der Punkt der Raumcurve und seine Projection aus der Sehne $\omega' \omega''$ denselben Parameter haben. Jede Gleichung zwischen Parametern von Punkten der Geraden gilt auch für die Parameter der Projectionen derselben auf R^3. *Wir nehmen also von jetzt ab die feste Raumcurve R^3 als Träger des binären Gebiets.*

Die binäre Form dritten Grades.

5. Die gegebene *binäre Form dritten Grades* sei:

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Die drei sie darstellenden Punkte der R^3, welche die Parameter $\omega, \omega', \omega''$ haben mögen, *bestimmen eine Ebene, welche wir die Ebene U nennen wollen.* Ihre Gleichung ist, weil $\omega + \omega' + \omega'' = -\frac{3b}{a}$, u. s. w.,

$$az_1 + 3bz_2 + 3cz_3 + dz_4 = 0;$$

also sind ihre Coordinaten a, $3b$, $3c$, d.

Eine lineare Beziehung zwischen cubischen Formen überträgt sich demnach auf die zugehörigen Ebenen; die zu den Systemen

$$\varkappa' U' + \varkappa'' U'', \text{ bez. } \varkappa' U' + \varkappa'' U'' + \varkappa''' U'''$$

gehörigen Ebenen bilden einen Büschel, bez. einen Bündel.

Die linearen Factoren von U sind $x - \omega y$, $x - \omega' y$, $x - \omega'' y$; also haben die zu U apolaren Formen dritten Grades die Gestalt

$$\varkappa (x - \omega y)^3 + \varkappa' (x - \omega' y)^3 + \varkappa'' (x - \omega'' y)^3.$$

Diesen drei Cuben gehören die Schmiegungsebenen der drei Punkte ω, ω', ω'' zu; demnach *gehen die Ebenen aller zu U apolaren Formen* dritten *Grades* durch den Schnittpunkt dieser drei Osculationsebenen, *also durch den Nullpunkt (Pol) der Ebene U im Nullsysteme N, das mit der cubischen Raumcurve verbunden ist;* und der oben erwähnte algebraische Satz des Herrn *Rosanes*, dass eine Form ungeraden Grades zu sich selbst apolar ist, entspricht bei der cubischen Form dem geometrischen, dass der Nullpunkt einer Ebene in ihr liegt.

Die simultane Covariante dritten Grades, die zu drei gegebenen Formen dieses Grades apolar ist, entspricht der Nullebene des Schnittpunkts der Ebenen, welche zu den drei Formen gehören.

Die Coordinaten des Nullpunkts der Ebene U — welcher $\mathfrak{U}$ heisse — müssen den Gleichungen der Schmiegungsebenen der drei Punkte ω, ω', ω'' genügen:

$$
\begin{aligned}
z_1 - 3\omega\, z_2 + 3\omega^2 z_3 - \omega^3 z_4 &= 0,\\
z_1 - 3\omega' z_2 + 3\omega'^2 z_3 - \omega'^3 z_4 &= 0,\\
z_1 - 3\omega'' z_2 + 3\omega''^2 z_3 - \omega''^3 z_4 &= 0;
\end{aligned}
$$

also, da die ω die Gleichung $U=0$ befriedigen, sind diese Coordinaten mit d, $-c$, b, $-a$ proportional.

Mit dem Nullsysteme N ist ein linearer Complex, der ebenfalls N heissen möge, *verbunden, der der Leitstrahlen des Nullsystems,* d. h. der Strahlen jeder Ebene um ihren Nullpunkt. Es fand sich eben, dass, wenn eine Ebene die Coordinaten a, $3b$, $3c$, d hat, die des zugehörigen Nullpunkts d, $-c$, b, $-a$ sind. Liegt nun ein Strahl p mit den Coordinaten p_{ik} in jener Ebene, so finden folgende vier Gleichungen statt, die — in Folge der Relation zwischen den p_{ik} — mit zweien äquivalent sind:

$$
\begin{aligned}
3p_{12}b - 3p_{31}c + p_{14}d &= 0,\\
-p_{12}a \qquad + 3p_{23}c + p_{24}d &= 0,\\
p_{31}a - 3p_{23}b \qquad + p_{34}d &= 0,\\
p_{14}a + 3p_{24}b + 3p_{34}c \qquad &= 0
\end{aligned}
$$

(*Salmon-Fiedler,* anal. Geom. des Raums 2. Aufl. I, S. 56. Gl. 9).

Geht hingegen p durch den Nullpunkt, so bestehen die vier ebenfalls mit zweien äquivalenten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
p_{34}c + p_{24}b + p_{23}a &= 0,\\
p_{34}d \qquad - p_{14}b + p_{31}a &= 0,\\
p_{24}d + p_{14}c \qquad - p_{12}a &= 0,\\
p_{23}d - p_{31}c + p_{12}b \qquad &= 0
\end{aligned}$$

(*Salmon-Fiedler* a. a. O. Gl. 1) u. 2).).

Beide Gleichungssysteme gelten, für alle Werthe von a, b, c, d, gleichzeitig, wenn

$$p_{14} = 3p_{23}.$$

Folglich ist dies die Gleichung des Complexes N.

6. Die Polare eines Punktepaars V in Bezug auf das Punktetripel U bildet nun mit V ein zu U apolares Tripel (Nr. 3). *Um also die (gemischte zweite) Polare eines Punktepaars* V *in Bezug auf ein Tripel* U *zu erhalten, suche man den dritten Schnittpunkt der Ebene, welche die Punkte* V *mit dem Nullpunkte der Ebene* U *verbindet, und der cubischen Raumcurve* R^3 *auf. Insbesondere giebt die Ebene, welche die Tangente eines Punktes* O *von* R^3 *mit dem genannten Nullpunkte verbindet, in ihrem dritten Schnitte die Polare von* O,O *(die reine zweite Polare von* O*)**).

Die Punktepaare V, welche in Bezug auf U einen gegebenen Punkt W zur Polare haben, rufen auf R^3 eine Involution hervor; denn ihre Verbindungslinien bilden eine Sehnen-Regelschaar der Curve R^3, zu deren Leitschaar die Gerade gehört, welche W mit $\mathfrak{U}$ verbindet. Doppelpunkte der Involution sind die beiden Punkte, für welche W reine zweite Polare ist, also die beiden Punkte der ersten Polare von W. Die in ihnen berührenden Tangenten gehören zur Regelschaar und sind diejenigen Tangenten der R^3, welche $W\mathfrak{U}$ treffen. Daraus ergiebt sich folgende Construction der (ersten) Polare eines Punktes O:

Man verbinde O *mit dem Nullpunkte* $\mathfrak{U}$ *der Ebene* U *und suche die beiden — nicht durch* O *selbst gehenden — Tangenten, welche* $O\mathfrak{U}$ *treffen; ihre Berührungspunkte bilden die (erste) Polare von* O *bezüglich* U.

In Folge des Nullsystems N kann man beide Constructionen dualisiren:

---

*) Diese Construction der reinen zweiten Polare eines Punktes in Bezug auf ein Punktetripel fand ich als vereinzeltes und nicht weiter benutztes Resultat in dem Aufsatze des Herrn *Appell* über die cubischen Raumcurven (Annales de l'École normale Année 1876 S. 248).

Die Polare von O, O' *resp. von* O, O *in Bezug auf* U *ergiebt sich als Osculationspunkt der dritten Schmiegungsebene aus dem Begegnungspunkte der Ebene* U *mit der Schnittlinie der Osculationsebenen von* O, O', *resp. mit der Tangente von* O.

Die Polare von O *bezüglich* U *besteht aus den Berührungspunkten der beiden Tangenten der* R^3, *welche die Schnittlinie der Ebene* U *und der Schmiegungsebene von* O *treffen, ohne in letzterer zu liegen.*

7. Die *Hesse*sche Form von U

$$H = (ac - b^2)\, x^2 + (ad - bc)\, xy + (bd - c^2)\, y^2$$

ist die einzige zu U apolare Form zweiten Grades (Nr. 2); die Polare der beiden Punkte H in Bezug auf U ist also unbestimmt; die Verbindungslinie dieser beiden Punkte geht demnach selbst durch den Nullpunkt $\mathfrak{U}$.

Die zu einem Punktetripel U *gehörigen Hesseschen Punkte sind mithin die Schnitte der (einzigen) Sehne der Raumcurve* R^3, *welche durch den Nullpunkt* $\mathfrak{U}$ *der Ebene* U *geht,* (cf. *Appell* a. a. O. S. 251) *oder die Osculationspunkte der beiden auf der Ebene* U *sich schneidenden Schmiegungsebenen.*

Für die Tripel in allen Ebenen durch die Schnittlinie der Schmiegungsebenen zweier Punkte der R^3 sind diese die *Hesse*schen Punkte.

Jede Ebene durch $\mathfrak{U}$ und den einen H enthält den andern H; also ist für jedes Paar, welches den einen H enthält, der andere die Polare.

Durch den Schnitt der Osculationsebene eines Punktes H und der Ebene U geht die Osculationsebene des andern H; mithin vereinigen sich die beiden Punkte der Polare des einen Punktes H im andern.

Aus beiden Sätzen folgt, dass die reine zweite Polare jedes der beiden Punkte H der andere ist.

8. Es sei J *die Covariante dritten Grades der Form* U (bei *Clebsch* Q) und D die Discriminante (bei *Clebsch* $-\frac{1}{2}R$):

$$\begin{aligned} J = (a^2 d - 3abc + 2b^3)\, x^3 + 3\,(abd + b^2 c - 2ac^2)\, x^2 y \\ + 3\,(2b^2 d - acd - bc^2)\, xy^2 + (3bcd - ad^2 - 2c^3)\, y^3, \\ D = a^2 d^2 + 4ac^3 - 6abcd + 4b^3 d - 3b^2 c^2; \end{aligned}$$

so besteht die Relation:

$$J^2 - DU^2 = -4H^3$$

(*Salmon* Nr. 195, 196; *Clebsch* S. 114, 115, 118).

Sind noch ξ, η die linearen Factoren von H, so hat man (*Clebsch* S. 128):

$$J = \xi^3 - \eta^3,$$
$$\sqrt{D} \cdot U = \xi^3 + \eta^3.$$

Also schneidet die Ebene, welche zu der Ebene U in Bezug auf die beiden auf ihr sich schneidenden Schmiegungsebenen harmonisch ist, die Curve R^3 in den Punkten der Covariante J.

Daraus ergiebt sich die Vertauschbarkeit der Formen und Ebenen U und J; wie sie algebraisch aus:

$$J(\varkappa U + \lambda J) = (\varkappa^2 - \lambda^2 D)(\varkappa J + \lambda D U)$$

für $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$ sich ergiebt, oder allgemeiner aus dieser Relation und der daraus durch Vertauschung von $\varkappa$, λ mit $\lambda D, \varkappa$ sich ergebenden folgt; während dem obigen Satze, dass alle Tripel $\varkappa U + \lambda J$ dieselben *Hesse*schen Punkte haben, die algebraische Relation

$$H(\varkappa U + \lambda J) = (\varkappa^2 - \lambda^2 D) H$$

entspricht. (*Clebsch* S. 123).

Die Ebenen U, J sind auch solche Ebenen, welche Herr *Cremona* a. a. O. Nr. 27 und im Mémoire de Géométrie pure sur les cubiques gauches Nouv. Ann. 2. sér. T. I Nr. 3 verbundene Ebenen genannt, weil er bei ihnen folgende Eigenschaft fand: Wird von der Spur jeder von ihnen in den verschiedenen Schmiegungsebenen der R^3 je der Pol bezüglich des aus der Developpablen ausgeschnittenen Kegelschnitts construirt, so ist dessen Ort ein in der andern Ebene befindlicher Kegelschnitt.

Die Ebenen U und J, welche durch dieselbe Schnittlinie zweier Osculationsebenen gehen, bilden eine Involution, von welcher diese Osculationebenen — die in den *Hesse*schen Punkten aller zugehörigen Tripel osculiren — die Doppelelemente sind. Jedem Punkte einer U entspricht ferner ein Punkt der zugehörigen J, der von jenem durch die beiden andern Punkte U harmonisch getrennte, und diese drei Punktenpaare bilden eine Involution mit den *Hesse*schen Punkten als Doppelpunkten; und jedes weitere Paar der Ebeneninvolution liefert drei weitere Paare dieser Punktinvolution. Bekanntlich bilden auch die Punktepaare der ersten Polaren aller Punkte in Bezug auf U eine Involution; diese ist mit der eben besprochenen identisch; denn die Punkte der ersten Polare eines der beiden *Hesse*schen Punkte vereinigen sich im andern; oder die erste Polare

eines der drei Punkte von U selbst besteht, wie man weiss, aus diesem und dem ihm in Bezug auf die beiden andern harmonisch zugeordneten, also dem ihm entsprechenden Punkte von J. Demnach sind für die beiden Involutionen auf die eine Weise die beiden Doppelpunkte, auf die andere drei Paare als gemeinsame nachgewiesen. Aus dem, was so eben über die erste Polare eines der drei Punkte von U bezüglich U gesagt ist, erhalten wir, wenn wir uns der zweiten Construction aus Nr. 6 erinnern, dass *die drei Rückkehrtangenten der von der Ebene U aus der Developpablen von R^3 ausgeschnittenen Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen diese Curve nochmals in drei Punkten treffen, durch welche die in den Punkten J berührenden Tangenten gehen;* denn sie sind die Schnitte der Ebene U mit den den Punkten U zugehörigen Schmiegungsebenen.

Sind A, B, C die Punkte von U, A', B', C' die ihnen entsprechenden in J; so bildet jeder der beiden *Hesse*schen Punkte E, F, da sie die Doppelpunkte der Involution AA', BB', CC' sind, mit A, B, C (oder A', B', C') eine äquianharmonische Gruppe (*Schröter*, Math. Ann. Bd. X, S. 420 und *Steiners* Vorlesungen II, 2. Aufl., S. 62), oder das durch A, B, C (oder A', B', C') bestimmte cyclisch-projective System hat E, F zu Doppelpunkten (*Clebsch* S. 133).

Da also $ABEF \;\overline{\wedge}\; BCEF \;\overline{\wedge}\; CBFE$, so sind A, C; B, B; E, F in Involution, und ebenso A, B; C, C; E, F und A, A; B, C; E, F. *Die drei Sehnen-Regelschaaren der Curve R^3, welche je die Verbindungslinie zweier der Punkte U und die Tangente im dritten enthalten, haben die Verbindungslinie der Hesseschen Punkte von U gemein.*

Hieraus ergiebt sich durch Projection aus einem Punkte der Curve R^3 auf eine Ebene ein Satz, den mir im vorigen Sommer mein College *Voss* mittheilte:

Ist ein Kegelschnitt der Träger des binären Gebiets, so werden die *Hesse*schen Punkte eines Tripels ABC auf demselben durch die Gerade eingeschnitten, welche die Schnittpunkte der Tangenten von A, B, C bez. mit BC, CA, AB enthält, oder sie sind die Berührungspunkte der Tangenten aus dem Punkte, in welchem die Verbindungslinien der Punkte A, B, C bez. mit den Gegenecken des von den Tangenten in A, B, C gebildeten Dreiecks zusammenlaufen.

Weitere Beziehungen der Punkte von U, J und der zugehörigen Nullpunkte giebt Herr *Cremona* in den Nouv. Annales.

9. Die Polare von V in Bezug auf U ist eine simultane lineare Covariante von V und U. Sei, wie bei *Salmon* Nr. 198,

$$V = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

so ist sie die *Salmon*sche Covariante

$$L_1 = (aC - 2bB + cA)\,x + (bC - 2cB + dA)\,y,$$

bei *Clebsch* p genannt, S. 209; die *Salmon*sche Covariante L_3 — bei *Clebsch* r — ist die Polare von V in Bezug auf J. Die Punkte L_1 und L_3 sind mithin die Projectionen der Nullpunkte der Ebenen U und J aus der Sehne V auf die Curve R^3; weil aber diese Ebenen zu den Schmiegungsebenen der *Hesse*schen Punkte harmonisch sind, so sind es auch die Nullpunkte zu den *Hesse*schen Punkten und demnach auch die Punkte L_1, L_3 ebenfalls zu den *Hesse*schen Punkten. Es gehört folglich die Gerade $L_1 L_3$ zu der Sehnen-Regelschaar der Curve R^3, welche die Tangenten der *Hesse*schen Punkte enthält, oder die Verbindungslinie dieser zu der Sehnen-Regelschaar, welche die Tangenten von L_1, L_3 enthält. Die beiden andern linearen simultanen Covarianten von U, V, nämlich L_2, L_4, bei *Clebsch* q und s, werden durch die vierten harmonischen Punkte von L_1, L_3 in Bezug auf V dargestellt.

Die simultanen Invarianten I und M von U und V (*Salmon* Nr. 198) — bei *Clebsch* D und M S. 209 — verschwinden, wenn H und V, bez. V und $L_1 L_3$ sich harmonisch trennen (so dass im letzteren Falle L_1 mit L_4 und L_2 mit L_3 identisch ist). Die Gerade V gehört dann zu der ersten, bez. zweiten der eben erwähnten Sehnen-Regelschaaren.

Eine simultane cubische Covariante der beiden Formen U und V wird offenbar durch die drei Punkte der Nullebene des Punktes UV repräsentirt, in dem sich die Ebene U und die Gerade V treffen. Man erhält diese Covariante am besten als die apolare Combinante von U, $3Vx$, $3Vy$ (Nr. 2), also

$$\begin{vmatrix} x^3, & -x^2y, & xy^2, & -y^3 \\ d, & c, & b, & a \\ 0, & C, & 2B, & 3A \\ 3C, & 2B, & A, & 0 \end{vmatrix},$$

oder $4(AC-B^2)\,U-3VL_1$, wie sich nach *Salmon* Nr. 147 durch Vergleichung der leitenden Glieder ergiebt. Also gehen die Nullebene des Punktes UV, die Ebene U und die Ebene, welche das Punktepaar V mit seiner Polare L_1 verbindet, durch dieselbe Gerade. Der Nullpunkt $\mathfrak{U}$ von U muss sich sowohl auf der Ebene U selbst, als auch auf der Nullebene des Punktes UV von U befinden, also auf der gemeinsamen Geraden, so dass die dritte Ebene ebenfalls durch ihn geht. Damit ist auf eine andere Weise die in Nr. 6 gegebene Construction der Polare eines Punktepaars bezüglich eines Punktetripels nachgewiesen; so hatte ich sie zuerst gefunden.

10. Wenn *zwei cubische Formen* U, U' gegeben sind, so führen die Formen $\varkappa U+\varkappa' U'$ zu Ebenen eines Büschels; die *simultane Jacobische Covariante*

$$(ab')\,x^4+2\,(ac')\,x^3y+\{(ad')+3\,(bc')\}\,x^2y^2+2\,(bd')\,xy^3+(cd')\,y^4$$

(*Salmon* Nr. 202) *entspricht den vier Punkten*, welche zweifache Punkte in Tripeln des Systemes $\varkappa U+\varkappa' U'$ sind, also *deren Tangenten die Schnittlinie der Ebenen* U, U' *treffen.*

Aus den Coordinaten der Ebenen U, U' (Nr. 5) ergeben sich die dieser Schnittlinie

$$\begin{aligned} p_{12}:p_{23}:p_{31}:p_{14}:p_{24}:p_{34} &= \pi_{34}:\pi_{14}:\pi_{24}:\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12} \\ &= 3(cd'):(ad'):3(bd'):9(bc'):3(ca'):3(ab')^{*)}. \end{aligned}$$

Die Invariante

$$P=(ad')-3(bc')$$

(*Salmon* Nr. 199; bei *Clebsch* J S. 223) *drückt also durch ihr Verschwinden aus,* dass für die Schnittlinie UU'

$$p_{14}=3\,p_{23};$$

dass mithin diese Schnittlinie der beiden Ebenen U, U' *zum Complexe* N *gehört* (Nr. 5). Vier Tangenten aber haben im Allgemeinen zwei Treffgeraden, und diese sind dann in Bezug auf das Nullsystem oder den Complex N conjugirt; die Geraden des Complexes aber sind sich selbst conjugirt. Also, *wenn* $P=0$ *ist, so ist die Gerade* UU' *die einzige Treffgerade der vier Tangenten der Curve* R^3, *welchen sie begegnet.*

---

*) *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. des Raumes, I, 2. Aufl., S. 51 und 56.

Ferner ist die Invariante S (*Salmon* Nr. 206; bei *Clebsch* $\frac{i}{2}$ S. 135) der biquadratischen *Jacobi*schen Form mit P^2 proportional (*Salmon* Nr. 202); *demnach berühren, wenn* $P=0$, *die vier von* $U\,U'$ *getroffenen Tangenten die Raumcurve in äquianharmonischen Punkten.*

Oder: Es seien U, U_1, U_2 drei cubische Formen, U' gehöre zum Systeme $U_1+\varkappa U_2$; ist P die simultane Invariante von U, U', so ist $P=0$ in Bezug auf $\varkappa$ linear; also geht durch den Punkt $U\,U_1\,U_2$ in der Ebene U eine Gerade UU', welche von vier in äquianharmonischen Punkten berührenden Tangenten getroffen wird; so dass wir nochmals sehen, dass die derartigen Geraden einen linearen Complex erzeugen. Wenn ξ ein linearer Factor von U ist, so wird $P=0$ für $U'=\xi^3$ erfüllt; demnach gehören die Schnittlinien der Ebene U mit den Osculationsebenen der drei Punkte U, die im Nullpunkte $\mathfrak{U}$ zusammenlaufen, zu diesem linearen Complexe; womit einleuchtet, dass er mit dem Complex N identisch ist.

Also jeder Strahl des Complexes N *wird von vier Tangenten getroffen, deren Berührungspunkte äquianharmonisch sind, und umgekehrt, jede von vier solchen Tangenten getroffene Gerade gehört zum Complexe* N *und ist die einzige Treffgerade der vier Tangenten.*

11. Das Hyperboloid durch drei der vier Tangenten, die eine der Bedingung $P=0$ genügende UU' treffen, wird also von der vierten berührt. Die Ebenen, welche die Gerade UU' mit den vier Tangenten verbinden, berühren das Hyperboloid in den Schnitten der Tangenten mit UU', und das Doppelverhältniss der vier Punkte ist bekanntlich dem der vier Ebenen gleich. Letztere sind diejenigen im Büschel UU', deren Form einen quadratischen Factor enthält; da der Parameter λ vom Formensystem in den Büschel übergeht, so ist das Doppelverhältniss der vier Ebenen gleich dem der vier λ, welche die in λ biquadratische Gleichung befriedigen, die ausdrückt, dass die Discriminante von $U+\lambda U'$ verschwindet. Wird aber für diese Discriminante als Function vierten Grades in λ die Invariante S gebildet, so erhält man (*Salmon* Nr. 204) $3P(P^3-24Q)$*); mithin verschwindet sie, weil $P=0$. *Vier Tangenten also, welche in äquianharmoni-*

*) Wegen Q cf. *Salmon* Nr. 199 und Nr. 14 dieses Aufsatzes.

schen Punkten berühren, treffen auch ihre einzige Transversale in vier äquianharmonischen Punkten.

Herr *Voss*, der sich liniengeometrisch mit der cubischen Raumcurve beschäftigt hat (Math. Ann. Bd. XIII, S. 168, 232) und dabei von der Darstellung der Coordinaten der Tangenten derselben als ganzer rationaler Functionen vierten Grades eines Parameters ausgegangen ist, hat diese Sätze auch gefunden. Als ich im vorigen Herbste mit diesen Untersuchungen — deren Redaction verzögert worden ist — beschäftigt war, theilte er mir mit, dass er diese Fragen ebenfalls vorgenommen habe. Seine Untersuchungen haben ihn noch zu folgenden Sätzen geführt: „Das Doppelverhältniss der Parameter von vier Tangenten ist demjenigen (σ) ihrer Berührungspunkte, d. i. dem der vier Ebenen, welche sie aus einer beliebigen Curvensehne projiciren, gleich, aber verschieden von dem (von Herrn *Voss*, Math. Ann. Bd. VIII, S. 60 eingeführten) „Momentendoppelverhältniss" der vier Tangenten, d. i. der mittleren Proportionale der beiden Doppelverhältnisse der Punktwürfe, die sie auf ihren beiden Treffgeraden einschneiden. Diese beiden zuletzt genannten sind die Wurzeln der in k quadratischen Gleichung

$$k^2 - k\{1-(1-\sigma)^4+\sigma^4\}+\sigma^4=0;$$

so dass das Momentendoppelverhältniss σ^2 ist." Im obigen Falle, wo σ eins der beiden äquianharmonischen Doppelverhältnisse ist, sind die Wurzeln der Gleichung beide gleich σ^2, d. i. dem andern äquianharmonischen Doppelverhältniss. Wenn also auch der Punktwurf auf der Curve und der auf der einzigen Treffgeraden beide äquianharmonisch sind, so sind sie doch nicht projectiv.

12. In der Regelschaar des Hyperboloids, zu der die drei Tangenten gehören, giebt es, wenn wir ihre Geraden als Elemente eines binären Gebiets annehmen, zu den drei Tangenten zwei *Hesse*sche Geraden, diejenigen nämlich, die auf jeder Leitgeraden die *Hesse*schen Punkte zu den von den drei Tangenten markirten Punkten einschneiden oder die Punkte, die mit diesen eine äquianharmonische Gruppe bilden (Nr. 8). Folglich wird die vierte Tangente das Hyperboloid auf einer dieser beiden *Hesse*schen Geraden berühren. Also hat man:

Bei allen dreifach unendlich vielen cubischen Raumcurven, welche drei gegebene Geraden tangiren, liegen die Berührungspunkte derjenigen Tangenten,

welche das durch die drei festen Tangenten bestimmte Hyperboloid berühren, auf zwei Geraden der Schaar derselben, den ihnen zugehörigen Hesseschen Geraden *).

Jede Curve besitzt nur zwei das Hyperboloid berührende Tangenten, denn durch sämmtliche Tangenten einer Curve wird in der andern Schaar der Fläche eine Involution hervorgerufen, in der die von derselben Tangente getroffenen Geraden gepaart sind. Die Doppelelemente dieser Involution gehen durch die Berührungspunkte der die Fläche berührenden Curventangenten und sind die einzigen Geraden dieser zweiten Schaar, die dem Complex N der Curve angehören, während die erste Schaar sich ganz in ihm befindet. Die Berührungspunkte der das Hyperboloid berührenden Curventangenten mit der Curve sind die beiden *Hesse*schen Punkte zu den Berührungspunkten der drei festen Tangenten. Auch zeigt sich, dass von vier äquianharmonischen Punkten jeder der eine *Hesse*sche Punkt zu den drei andern ist, da in Bezug auf die Eigenschaft, dass ihre vier Tangenten eine einzige Transversale haben, alle vier Punkte sich gleichartig verhalten (*Cremonas* Introduzione Nr. 26; *Steiner-Schröters* Vorlesungen a. a. O.).

13. Die Invariante T (*Salmon* Nr. 206; bei *Clebsch* $\frac{1}{6}j$ S. 136) der *Jacobi*schen Function von U, U' ist in den Coefficienten von U, U' je vom dritten Grade, also auch in $\varkappa$, wenn wir wieder, wie in Nr. 10, U' durch $U_1 + \varkappa U_2$ ersetzen; folglich schliessen wir, wie dort, dass *diejenigen Geraden, welche von vier in harmonischen Punkten berührenden Tangenten der Raumcurve R^3 getroffen werden, einen Complex dritten Grades erzeugen.* Handelt es sich um ein anderes Doppelverhältniss σ, so ist bekanntlich die absolute Invariante S^3-T^2 eine Function desselben, nämlich $108 \cdot \frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{(1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2}$ (*Clebsch* S. 170), also eine Constante q; die Gleichung $S^3-qT^2=0$, in $\varkappa$ vom sechsten Grade, zerfällt aber, weil S mit P^2 proportional ist, in zwei vom dritten Grade. *Diejenigen Geraden, welche vier solche Tangenten der Curve R^3 treffen, deren Berührungspunkte ein gegebenes Doppelverhältniss haben, bilden zwei Complexe dritten Grades.*

Herr *Voss* hat a. a. O. S. 240 analoge Sätze gefunden, doch muss

*) *Voss*, Math. Ann. Bd. XIII. S. 172.

bei der Vergleichung mit den seinigen wohl beachtet werden, dass — ausser beim äquianharmonischen Doppelverhältniss — verschiedene Complexe entstehen, je nachdem das Doppelverhältniss der Schnittpunkte der Complexstrahlen mit den vier von ihnen getroffenen Tangenten von $\boldsymbol{R}^3$ oder das der Berührungspunkte dieser Tangenten gegeben ist; Herr *Voss* hat es im Allgemeinen mit dem ersteren zu thun.

Zu jedem der Complexe dritten Grades gehören, wie zu dem linearen $\boldsymbol{N}$, in jeder Ebene die drei Rückkehrtangenten der Schnittcurve der Developpablen, weil das Doppelverhältniss von vier Elementen, von denen drei sich vereinigt haben, unbestimmt ist. Diese Geraden, welche in den Osculationsebenen der Raumcurve je den Strahlbüschel um den Osculationspunkt bilden, erzeugen eine Congruenz dritter Ordnung und dritter Klasse.

14. Die schon vorübergehend erwähnte *simultane Invariante* $\boldsymbol{Q}$ (*Salmon* Nr. 199, 200; bei *Clebsch* Ω S. 224) *der beiden cubischen Formen* U, U' *verschwindet*, wenn in $\varkappa U + \varkappa' U'$ ein Cubus vorkommt, *wenn also die Gerade* UU' *in einer Schmiegungsebene liegt.*

Die Resultante $\boldsymbol{R}$ von U, U' ist mit $\boldsymbol{P}^3 - 27\,\boldsymbol{Q}$, die Discriminante der *Jacobi*schen simultanen Covariante mit $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}$ proportional (*Salmon* Nr. 202); dem entspricht geometrisch, dass von den vier Tangenten der Raumcurve $\boldsymbol{R}^3$, welche UU' treffen, zwei sich vereinigen, entweder wenn UU' die $\boldsymbol{R}^3$ trifft, also U, U' einen Punkt gemein haben ($\boldsymbol{R} = 0$), oder wenn UU' in einer Schmiegungsebene liegt ($\boldsymbol{Q} = 0$).

15. Die Nullpunkte $\mathfrak{U}_\lambda$ der Ebenen, die den Tripeln $U + \lambda U'$ zugehören, liegen auf der Geraden $\mathfrak{w}$, welche der Geraden UU' im Nullsysteme $\boldsymbol{N}$ conjugirt ist. Die Geraden, welche $\mathfrak{w}$ einmal, $\boldsymbol{R}^3$ zweimal treffen, verbinden die *Hesse*schen Punkte aller $U + \lambda U'$; sie erzeugen eine Fläche vierten Grades mit $\boldsymbol{R}^3$ als Doppelcurve. Die beiden Erzeugenden, welche je von demselben Punkte $\boldsymbol{O}$ von $\boldsymbol{R}^3$ ausgehen, markiren auf $\mathfrak{w}$ die Nullpunkte der Ebenen der Tripel, welche $\boldsymbol{O}$ zu ihrem einen *Hesse*schen Punkte haben. Es fragt sich, wie oft zwei solche entsprechende Punkte auf $\mathfrak{w}$ — Nullpunkte zu Tripeln mit einem gemeinsamen *Hesse*schen Punkte — $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$, die zu U, U' gehörigen Nullpunkte, harmonisch trennen. Sei $\mathfrak{U}_\mu$ der vierte harmonische Punkt in Bezug auf $\mathfrak{U}\mathfrak{U}'$ zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{U}_\lambda$; die von $\mathfrak{U}_\mu$ ausgehende Sehne bildet mit $\mathfrak{w}$ eine Ebene; die Linien, welche

deren dritten Schnitt mit $\boldsymbol{R}^3$ mit den Endpunkten der Sehne verbinden, geben auf w zwei Punkte $\mathfrak{U}_\nu$; so dass jedem $\mathfrak{U}_\lambda$ zwei $\mathfrak{U}_\nu$ entsprechen. Umgekehrt entsprechen jedem $\mathfrak{U}_\nu$ (zwei $\mathfrak{U}_\mu$ und) zwei $\mathfrak{U}_\lambda$. Die vier Coincidenzen zerfallen in zwei Paare, deren jedes aus zwei zu $\mathfrak{U}\mathfrak{U}'$ harmonischen und zu zwei Tripeln mit einem gemeinsamen *Hesse*schen Punkte gehörigen Nullpunkten besteht. Diese beiden Punkte, von denen jeder für zwei solche Tripel gemeinsamer *Hesse*scher Punkt ist, deren Ebenen zu $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}'$ harmonisch sind, stellen *die simultane quadratische Covariante* Θ von *Salmon* (Nr. 204) und *Clebsch* (S. 222) dar; denn aus $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}+\lambda \boldsymbol{U}') = \boldsymbol{H}+\lambda\Theta + \lambda^2\boldsymbol{H}'=0$ folgen für $\Theta=0$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für λ.

Verschwindet nun die simultane Invariante $\boldsymbol{Q}$ von $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}'$, so dass es in $\boldsymbol{U}+\lambda \boldsymbol{U}'$ einen Cubus $\mathfrak{x}^3$ giebt, also $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'$ in der $\mathfrak{x}$ zugehörigen Schmiegungsebene liegt und w durch den Punkt $\mathfrak{x}$ geht, so gehört $\mathfrak{x}^3$ je zu den beiden Formen, welche einen gegebenen Punkt zu ihrem einen *Hesse*schen Punkt haben, weil die *Hesse*schen Punkte von $\mathfrak{x}^3$ unbestimmt sind; also ist $\mathfrak{x}^3$ auch je eine der beiden Formen, deren Ebenen überdies noch zu $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}'$ harmonisch sind. Es giebt mithin hier nur ein solches Formenpaar: der Nullpunkt der von $\mathfrak{x}^3$ verschiedenen Form $\boldsymbol{U}+\lambda_0 \boldsymbol{U}'$ desselben ist der vierte harmonische Punkt in Bezug auf $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ zu $\mathfrak{x}$. Die durch denselben gehende Sehne der Curve markirt auf ihr die beiden Punkte Θ, welche beide hier zu dem Tripelpaar ($\mathfrak{x}^3$, $U+\lambda_0 U'$) führen. Von der Fläche vierten Grades hat sich, weil w die Curve $\boldsymbol{R}^3$ (in $\mathfrak{x}$) trifft, der Kegel ($\mathfrak{x}\boldsymbol{R}^3$) abgelöst und ist die Fläche zweiten Grades der w treffenden Sehnen von $\boldsymbol{R}^3$ übrig geblieben. Die sämmtlichen $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}+\lambda \boldsymbol{U}')$ bilden mithin ein lineares System (oder eine Involution) als Endpunkte der Geraden einer Sehnen-Regelschaar; und da die Verbindungslinie der Punkte Θ selbst eine Erzeugende dieser Schaar ist, so ist Θ selbst eine der $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}+\lambda \boldsymbol{U}')$, also in linearer Beziehung (Involution) zu $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}'$. Demnach *verschwindet die simultane Invariante* $\boldsymbol{R}$ (*Salmon* Nr. 193, $\boldsymbol{R}_{123}$ bei *Clebsch* S. 202) *dieser drei quadratischen Covarianten* $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}'$, Θ. Diese Invariante stimmt aber mit $\boldsymbol{Q}$ überein (*Salmon* Nr. 204 am Ende); *Clebsch* hat dies sogar als Definition von Ω ($= \boldsymbol{Q}$) benutzt.

Die binäre Form vierten Grades.

16. Es sei gegeben *die binäre Form vierten Grades*

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4;$$

A, B, C, D seien die sie auf R^3 darstellenden Punkte mit den Parametern $\omega', \omega'', \omega''', \omega^{IV}$; die Coordinaten ihrer Tangenten sind also nach Nr. 4 mit $\omega'^4, \omega'^2, -2\omega'^3, 3\omega'^2, \omega', 1$, bez. ω''^4, u. s. f. proportional.

Die Coordinaten *der beiden Treffgeraden r, s der vier Tangenten* seien $p_{12}, \ldots, p_{34}$. Sie müssen der Gleichung

$$p_{34}\omega'^4 - 2p_{24}\omega'^3 + (3p_{23} + p_{14})\omega'^2 + 2p_{31}\omega' + p_{12} = 0$$

und drei analogen in $\omega'', \omega''', \omega^{IV}$ genügen; da aber die ω die Wurzeln von $U=0$ sind, so folgt, dass p_{34}, $-2p_{24}$, $3p_{23}+p_{14}$, $2p_{31}$, p_{12} mit a, $4b$, $6c$, $4d$, e proportional sind. Wir setzen sie am besten gleich. Führen wir also

$$p_{12} = e,\ p_{31} = 2d,\ p_{24} = -2b,\ p_{34} = a$$

in die identische Relation

$$p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0$$

ein, so ergeben sich, in Verbindung mit

$$3p_{23} + p_{14} = 6c,$$

für p_{23}, bez. p_{14} die quadratischen Gleichungen:

$$3p_{23}^2 - 6c\,p_{23} + 4bd - ae = 0,$$
$$\text{bez. } p_{14}^2 - 6c\,p_{14} + 3\,(4bd - ae) = 0.$$

Die beiden Treffgeraden r, s unterscheiden sich demnach nur in den Coordinaten p_{23}, p_{14}. Die Discriminante beider Gleichungen ist, abgesehen von einem numerischen Factor, $ae - 4bd + 3c^2 = S$ (*Salmon* Nr. 206; bei *Clebsch* $i = 2S$, S. 135). Werden anderseits die obigen Werthe für a, $4b$, $6c$, $4d$, e in $S = ae - 4bd + 3c^2 = 0$ eingesetzt, so ergiebt sich, mit Benutzung der identischen Relation,

$$(3p_{23} - p_{14})^2 = 0,$$

also der doppelt gerechnete lineare Complex N; womit wir die obigen Resultate, dass die vier Tangenten von äquianharmonischen Punkten nur eine Treffgerade haben und diese zum linearen Complex N gehört (der eben wegen dieses Zusammenfallens doppelt zu rechnen ist), für die all-

gemeine Form vierten Grades erhalten. Das ist ja auch nothwendig; denn *jede allgemeine biquadratische Form kann Jacobische Form von zwei cubischen Formen sein, freilich auf zwei im Allgemeinen nicht rational trennbare Weisen,* indem die cubischen Formen von irgend zwei beliebigen Ebenen herrühren, die entweder durch die eine oder durch die andere Tangententransversale der biquadratischen Form gehen. *Geht man aber von zwei cubischen Formen aus, so sind die Tangententransversalen der zugehörigen Jacobischen Form rational trennbar:* die eine ist die Schnittlinie der den beiden cubischen Formen zugehörigen Ebenen, die andere die Verbindungslinie der Nullpunkte derselben; die Discriminante der quadratischen Gleichungen für die beiden Coordinaten, in denen sich diese Transversalen unterscheiden, ist ein Quadrat, nämlich mit P^2, d. i. $\frac{1}{3} S$ von der *Jacobi*schen Form proportional.

17. *Ebenso sind die Tangententreffgeraden, die zu der Hesseschen Form* (vierten Grades)

$$H = (ac - b^2)\,x^4 + 2\,(ad - bc)\,x^3 y + (ae + 2bd - 3c^2)\,x^2 y^2 \\ + 2\,(be - cd)\,xy^3 + (ce - d^2)\,y^4$$

einer Form U vierten Grades (*Salmon* Nr. 209; bei *Clebsch* $\frac{1}{2} H$ S. 135) *gehören, rational trennbar;* denn es ist $S(6H) = 3S^2(U)$ (*Salmon* Nr. 217); man findet für beide Treffgeraden

$$p_{12} = 3\,(ce - d^2),\ p_{31} = 3\,(be - cd),\ p_{24} = 3\,(bc - ad),\ p_{34} = 3\,(ac - b^2);$$

für die eine

$$p_{23} = ae - bd,$$
$$p_{14} = 9\,(bd - c^2);$$

für die andere

$$p_{23} = 3\,(bd - c^2),$$
$$p_{14} = 3\,(ae - bd).$$

Für die erstere dieser beiden Geraden lässt sich noch eine andere geometrische Bedeutung nachweisen. Ist λ der Parameter eines beweglichen Punktes der R^3, so ist das System der (ersten) Polaren

$$\lambda\,(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + (bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3),$$

mithin der Büschel der zugehörigen Ebenen

$$(a\lambda + b)\,z_1 + 3\,(b\lambda + c)\,z_2 + 3\,(c\lambda + d)\,z_3 + (d\lambda + e)\,z_4 = 0.$$

Die Axe des Büschels dieser Ebenen hat zu Coordinaten

$$\pi_{12} = 3\,(ac - b^2),\ \pi_{23} = 9\,(bd - c^2),\ \pi_{31} = 3\,(bc - ad),$$
$$\pi_{34} = 3\,(ce - d^2),\ \pi_{14} = ae - bd,\quad \pi_{24} = 3\,(be - cd);$$

folglich stimmen ihre p_{ik} (cf. Nr. 10) mit denen der ersten der beiden Treffgeraden der Tangenten der *Hesse*schen Form überein. Also:

Die Ebenen, welche die Tripel der ersten Polaren aller Punkte der cubischen Raumcurve in Bezug auf ein Quadrupel auf derselben verbinden, bilden einen Ebenenbüschel um die eine Treffgerade der Tangenten des zugehörigen Hesseschen Quadrupels.

Diese Büschelaxe wird man am besten mit Hilfe der ersten Polare von zwei der vier Punkte A, B, C, D von U finden; denn z. B. die erste Polare von A besteht bekanntlich aus A selbst und seiner nach Nr. 6 zu construirenden ersten Polare in Bezug auf BCD.

Ferner ergiebt sich, dass *das Hessesche Quadrupel durch die vier Punkte gebildet wird, in denen sich zwei Punkte einer ersten Polare in Bezug auf das gegebene Quadrupel vereinigen.*

Also ist die Hessesche Form von U die Jacobische für irgend zwei erste Polaren der Form U.

Es sei H ein *Hesse*scher Punkt, H' derjenige, dessen (erste) Polare aus H, H und H'' besteht; so besteht die Polare von H', H (d. i. die von H in Bezug auf H, H, H'') aus H, H und die von H', H, H (also die von H in Bezug auf H, H) wird unbestimmt; oder H', H, H bilden ein apolares Tripel in Bezug auf U; demnach muss auch die Polare von H, H (oder die reine zweite Polare von H) aus zwei in H' sich vereinigenden Punkten bestehen.

Und wir erhalten zwei andere Definitionen *der Hesseschen Punkte:*

Sie sind diejenigen Punkte, in denen zwei Punkte eines in Bezug auf U apolaren Tripels zusammenfallen, oder diejenigen, deren reine zweite Polare aus zwei vereinigten Punkten besteht.

Letztere Definition, die auch noch dahin umgeändert werden kann, dass die *Hesse*schen Punkte auch solche sind, die als Punkte einer reinen zweiten Polare nicht zwei, sondern nur einen Pol haben, ist die bekannte, die aus

$$4 \cdot 3\, H = \begin{vmatrix} \frac{d^2 U}{dx^2}, & \frac{d^2 U}{dx\,dy} \\ \frac{d^2 U}{dx\,dy}, & \frac{d^2 U}{dy^2} \end{vmatrix}$$

folgt.

Im Vorhergehenden ist aber auch folgender Satz gewonnen, den ich mich nicht erinnern kann, schon gelesen zu haben: *Wenn die zwei Punkte der (reinen zweiten) Polare von H, H in Bezug auf ein Punktquadrupel sich in H' vereinigen, so fallen von den drei Punkten der (ersten) Polare von H' zwei in H zusammen, und umgekehrt.*

18. Wenn O ein fester Punkt ist, O_x ein beweglicher; so erzeugen die Polaren von O, O_x, darunter die von O, O, d. h. die Polaren von O_x bezüglich des Tripels, welches die Polare von O in Bezug auf U bildet, eine Involution. Wenn O'' ein Doppelpunkt derselben ist und O' derjenige Punkt, der mit O zusammen O'', O'' zur Polare hat, so ist die Polare von $OO'O''$ in Bezug auf U, d. i. die von O'' in Bezug auf $O''O''$ unbestimmt. Also ist $OO'O''$ apolar für U; und umgekehrt wenn O'' mit O, O' ein apolares Tripel bildet, so muss die Polare von O, O' aus zwei in O'' vereinigten Punkten bestehen. Mithin müssen auch die Punkte der Polare von O, O'' in O' zusammenfallen (und die der Polare von O', O'' in O), so dass O' der andere Doppelpunkt der obigen Involution ist. *Jeder Punkt O gehört mithin nur zu einem für U apolaren Tripel und wird zu demselben vervollständigt durch die Doppelpunkte der Involution der Punktepaare, welche die Polaren von OO_x in Bezug auf U bilden,* wo O_x ein beweglicher Punkt ist.

19. Die Gleichung des Complexes der Strahlen, welche von vier in äquianharmonischen Punkten berührenden Tangenten getroffen werden, ist (Nr. 10, 16)

$$N = 3p_{23} - p_{14} = 0.$$

Setzt man die in Nr. 16 gefundenen Ausdrücke für die Coefficienten von U durch die Coordinaten der Treffgeraden der Tangenten von U in

$$T = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0$$

ein, so ergiebt sich *die Gleichung des Complexes dritten Grades der Strahlen, welche von vier in harmonischen Punkten berührenden Tangenten der Curve R^3 getroffen werden;* nämlich

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = 108\, p_{12}\, p_{23}\, p_{34} + 36\, p_{12}\, p_{14}\, p_{34} - 54\, p_{23}\, p_{24}\, p_{31} \\ - 18\, p_{24}\, p_{14}\, p_{31} - 54\, p_{34}\, p_{31}^2 + 54\, p_{24}^2\, p_{12} - 27\, p_{23}^2\, p_{14} \\ - 9\, p_{23}\, p_{14}^2 - 27\, p_{23}^3 - p_{14}^3 = 0; \end{aligned}$$

und die beiden Complexe, die einem gegebenen Doppelverhältnisse σ der Berührungspunkte entsprechen, sind, wenn q die in Nr. 13 angegebene Bedeutung hat:

$$N^3 + \sqrt{q} \cdot \mathrm{H} = 0, \quad N^3 - \sqrt{q} \cdot \mathrm{H} = 0.$$

Die gemeinsame Congruenz aller dieser Complexe dritten Grades ist die, welche $N=0$ und $\mathrm{H}=0$ gemeinsam ist und am Ende von Nr. 13 erwähnt wurde, dreifach gerechnet. Die Complexe haben in jedem Strahle dieser Congruenz drei unendlich nahe Elemente gemein.

20. Die beiden Treffgeraden r, s der vier Tangenten von U sind in Bezug auf das Nullsystem oder den Complex N conjugirt; daraus wird sich eine Beziehung zwischen ihren Coordinaten ergeben. Ist allgemein die Gleichung eines linearen Complexes

$$C = \alpha p_{12} + \beta p_{23} + \gamma p_{31} + \alpha' p_{34} + \beta' p_{14} + \gamma' p_{24} = 0,$$

so ist bekanntlich, wenn p und p' zwei conjugirte Geraden sind und

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \triangle$$

gesetzt wird,

$$p'_{12} = -\triangle p_{12} + \alpha' C, \quad p'_{23} = -\triangle p_{23} + \beta' C, \quad p'_{31} = -\triangle p_{31} + \gamma' C,$$
$$p'_{34} = -\triangle p_{34} + \alpha C, \quad p'_{14} = -\triangle p_{14} + \beta C, \quad p'_{24} = -\triangle p_{24} + \gamma C;$$

woraus sich das Moment der beiden conjugirten Geraden proportional ergiebt mit

$$p_{12} p'_{34} + p_{23} p'_{14} + p_{31} p'_{24} + p_{34} p'_{12} + p_{14} p'_{23} + p_{24} p'_{31} = C^2 = (\alpha p_{12} + \cdots + \gamma' p_{24})^2,$$

also mit dem Quadrate des Werths, den die linke Seite der Gleichung des Complexes durch Einsetzung der Coordinaten von p erhält*).

In dem Falle des Nullsystem-Complexes $N = 0$ ergiebt sich zunächst die Uebereinstimmung von vier Coordinaten der beiden Tangententransversalen r, s; für die andern erhält man:

$$p'_{23} = \tfrac{1}{3} p_{14}, \quad p'_{14} = 3 p_{23};$$

so dass

$$3(p_{23} - p'_{23}) = -(p_{14} - p'_{14}),$$

was freilich auch aus:

$$3 p_{23} + p_{14} = 3 p'_{23} + p'_{14} = 6c$$

(Nr. 16) folgt.

---

*) Ich mache diesen Zusatz wegen der bezüglichen Notiz in *Salmon-Fiedlers* Raumgeom. 2. Aufl. I, S. 66.

Seien q_{ik} die Coordinaten einer Geraden q, welche beide Transversalen r, s trifft; so muss sein

$$q_{34}e + q_{12}a - 2q_{31}b + 2q_{24}d + q_{14}p_{23} + q_{23}p_{14} = 0,$$
$$q_{34}e + q_{12}a - 2q_{31}b + 2q_{24}d + q_{14}p'_{23} + q_{23}p'_{14} = 0.$$

Daraus ergiebt sich durch Subtraction, mit Rücksicht auf die eben erhaltene Gleichung:

$$3q_{23} - q_{14} = 0,$$

was dem bekannten geometrischen Resultate entspricht, dass q dem Complexe N, von dem ja r, s zwei conjugirte Gerade sind, angehört. Durch Addition ergiebt sich aber:

$$aq_{12} - 2bq_{31} + c\,(3q_{23} + q_{14}) + 2dq_{24} + eq_{34} = 0,$$

also ein linearer Complex, dem die Geraden q, welche r, s treffen, ebenfalls angehören müssen. Die Tangenten der Punkte A, B, C, D gehören als Gerade q zu diesem Complexe, anderseits aber auch zu N; überhaupt ist die Congruenz der Geraden q, welche r, s zu Leitgeraden hat, beiden gemeinsam. Wir werden zu diesem linearen Complexe, der durch die Form oder das Quadrupel U inducirt wird, und den wir *den Complex* U nennen wollen, bald noch auf eine andere Weise gelangen.

21. Sind *zwei Formen* U', U'' vierten Grades gegeben, so bilden die Tangententransversalen r' s', r'' s'' zwei Paare conjugirter Geraden des Nullsystems; jede Gerade, welche drei von ihnen trifft, begegnet auch der vierten, und die Geraden, die dies thun, erfüllen eine Regelschaar, die den Complexen N, U', U'' gemeinsame: sie treffen natürlich, wegen der Linearität der Bedingungsgleichung des Schneidens in den Coefficienten der Formen, auch die Transversalen, die den Formen $\varkappa' U' + \varkappa'' U''$ zugehören; so dass diese, involutorisch gepaart, die Leitschaar der Regelschaar erzeugen. Die Doppelelemente der Involution gehören den äquianharmonischen Gruppen in $\varkappa' U' + \varkappa'' U''$ zu und befinden sich — allein in dieser Schaar — in dem Complexe N.

Das Hyperboloid, welches beide Schaaren trägt, trifft die Curve R^3 sechsmal. Die Gerade der Leitschaar, welche durch einen der sechs Punkte geht, begegnet vier Tangenten, von denen zwei unendlich nahe sind; sie ist also die eine Tangententransversale für eine Form $\varkappa' U' + \varkappa'' U''$, welche

einen quadratischen Factor hat. Die sechs Schnittpunkte stellen demnach *die Jacobische simultane Covariante sechsten Grades der beiden biquadratischen Formen U', U'' dar* (*Salmon* Nr. 220).

Wenn die beiden Formen U', U'' in der Beziehung stehen, dass die eine die *Hesse*sche Form H der andern U ist, so befinden sich bekanntlich in dem System $\varkappa U + \lambda H$ drei volle Quadrate; die Leitschaar enthält drei Sehnen der Raumcurve R^3 und ihnen in der Involution conjugirt drei Osculationsebenen-Schnittlinien. Die Endpunkte der drei Sehnen, zugleich die Osculationspunkte der sich schneidenden Osculationsebenen, repräsentiren *die Covariante sechsten Grades J von U* (oder von H) (*Salmon* Nr. 209; von *Clebsch* T genannt S. 136). Mit jeder Form vierten Grades, die auf R^3 dargestellt ist, ist somit ein gewisses Hyperboloid verbunden. Wird die Form vierten Grades U auf einem Kegelschnitte dargestellt, so schneiden nach *Salmon-Burnside* (*Salmon* Nr. 219) die Diagonalen des aus den vier Punkten U gebildeten vollständigen Vierecks in den Kegelschnitt die sechs Punkte J ein, welche ja zu je zweien zu zwei Paaren AB, CD; AC, BD; AD, BC harmonisch sind. Betrachten wir den Kegelschnitt als Projection der Raumcurve R^3 aus einem ihrer Punkte, so ergiebt sich folgende Construction der sechs Punkte J:

Die drei Sehnen-Regelschaaren der Curve R^3, welche durch AB, CD; AC, BD; AD, BC gehen, haben zu je zweien noch eine Sehne gemein. Die sechs Endpunkte dieser drei Sehnen sind die Punkte J.

Von diesen Regelschaaren gilt noch weiter folgende Eigenschaft, auf die mich Herr *Voss* aufmerksam machte und die leicht aus Polareigenschaften des Kegelschnitts abgeleitet werden kann: Werden zwei der drei eben erwähnten Sehnen-Regelschaaren betrachtet, z. B. die beiden ersten; sei KL eine Sehne der ersten, zieht man dann durch die Endpunkte K, L die Sehnen KM und LN der zweiten Schaar, so ist die Verbindungslinie der andern Endpunkte M, N derselben wieder eine Gerade der ersten Schaar. Man erhält so einfach unendlich viele der cubischen Raumcurve eingeschriebene Vierecke, von denen die einen Gegenseiten der einen, die andern der andern der beiden Regelschaaren angehören. *Die Ecken dieser Vierecke stellen die Formen $\varkappa U + \lambda H$ dar*; dreimal fallen zwei Gegenseiten zusammen. —

Als simultane Invariante zweier Formen vierten Grades U', U'' wird unter andern von Herrn *Salmon* Nr. 220

$$B = \begin{vmatrix} a', & b', & c', & d' \\ b', & c', & d', & e' \\ a'', & b'', & c'', & d'' \\ b'', & c'', & d'', & e'' \end{vmatrix},$$

erwähnt; ihr Verschwinden drückt aus, dass beide Quadrupel ein gemeinsames apolares Tripel haben.

22. Wenn *drei Formen vierten Grades* U', U'', U''' gegeben sind, so bilden, wie aus den Eigenschaften des Nullsystems hervorgeht, die Tangententransversalen aller Quadrupel $\varkappa' U' + \varkappa'' U'' + \varkappa''' U'''$ eine lineare Congruenz; ihre Leitlinien sind die beiden Geraden, die den vier linearen Complexen N, U', U'', U''' gemeinsam sind.

Sind endlich *vier Formen vierten Grades* U', U'', U''', U^{IV} gegeben, so sind die Coordinaten der Tangententreffgeraden von

$$\varkappa' U' + \varkappa'' U'' + \varkappa''' U''' + \varkappa^{IV} U^{IV}$$

gegeben durch:

$$p_{12} = \varkappa' e' + \varkappa'' e'' + \varkappa''' e''' + \varkappa^{IV} e^{IV}, \quad p_{34} = \varkappa' a' + \cdots,$$
$$\tfrac{1}{2} p_{31} = \varkappa' d' + \cdots, \quad -\tfrac{1}{2} p_{24} = \varkappa' b' + \cdots, \quad \tfrac{1}{2} p_{23} + \tfrac{1}{6} p_{14} = \varkappa' c' + \cdots;$$

woraus sich durch Elimination der $\varkappa$ als Gleichung des linearen Complexes der Tangententransversalen des durch $U', \ldots, U^{IV}$ constituirten linearen Systems dritter Stufe ergiebt:

$$\begin{vmatrix} p_{12}, & e', & e'', & e''', & e^{IV} \\ p_{31}, & 2d', & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3p_{23} + p_{14}, & 6c', & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_{24}, & 2b', & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{34}, & a', & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gebilde (Regelschaar, lineare Congruenz, linearer Complex), welche bez. durch die Tangententransversalen aller Formen

$$\varkappa' U' + \varkappa'' U'', \quad \varkappa' U' + \varkappa'' U'' + \varkappa''' U''', \quad \varkappa' U' + \varkappa'' U'' + \varkappa''' U''' + \varkappa^{IV} U^{IV}$$

erzeugt werden, reproduciren sich selbst durch Polarisirung in Bezug auf den Complex N, und zwar sind je zwei zusammengehörige Transversalen polar (oder conjugirt).

23. Wir gehen jetzt wieder zu *einer Form vierten Grades* U zurück; seien U', U'', U''', U^{IV} vier zu ihr apolare Formen vierten Grades, die das ganze System der zu U apolaren Formen dieses Grades constituiren. Der zu ihnen gehörige Complex, wie er im Vorhergehenden gefunden wurde, hat, in Folge der Gleichungen der Apolarität zwischen U und den $U', \ldots, U^{IV}$, die Gleichung:

$$ap_{12} - 2bp_{31} + c\,(3p_{23} + p_{14}) + 2dp_{24} + ep_{34} = 0,$$

also ist er der oben in Nr. 20 gefundene.

Zu jedem Punktquadrupel U auf der cubischen Raumcurve R^3 *gehört ein gewisser linearer Complex U, erzeugt durch die Paare der Transversalen der Tangenten aller zu U apolaren Quadrupel. Er geht durch die Congruenz der Geraden, welche die beiden Transversalen der Tangenten des gegebenen Quadrupels treffen, und hat dieselbe mit dem Complexe* N *gemein.* Die Geraden derselben sind die (einzigen) Transversalen der Tangenten der zu U apolaren äquianharmonischen Quadrupel.

Der Complex U wird ein specieller, so dass alle Strahlen desselben eine Gerade — die Axe — treffen, wenn seine Coefficienten, welche dann die Coordinaten q_{ik} dieser Axe sind, der identischen Relation

$$q_{12}\,q_{34} + q_{23}\,q_{14} + q_{31}\,q_{24} = 0$$

genügen, wenn also

$$ae - 4bd + 3c^2 = S = 0.$$

Das Quadrupel U ist dann äquianharmonisch und die Complexaxe ist die einzige Tangententransversale von U.

In diesem Falle ist U auch zu sich selbst apolar: die Axe des Complexes ist auch Strahl desselben.

Der lineare Complex U ist für die Form vierten Grades das Analogon zu dem Ebenenbündel um den Nullpunkt der Ebene U für die Form dritten Grades. Durch Polarisirung in Bezug auf N ging dort der Ebenenbündel in das Punktfeld der Ebene U über; hier bleibt der Complex erhalten, jeder seiner Strahlen geht aber in die andere Treffgerade derselben Tangenten über.

Dort ergab sich der Nullpunkt als Schnitt der drei Osculationsebenen in den Punkten U, d. i. der Ebenen, welche den drei Cuben unter den zu U apolaren Formen entsprechen. Jetzt giebt es unter den zu U

apolaren Formen ebenfalls vier Biquadrate, die vierten Potenzen der linearen Factoren von U. Da aber z. B. die beiden Transversalen der vier in der Tangente von A vereinigten Tangenten sich auch noch mit ihr vereinigen, so sind diese ausgearteten Transversalenpaare geometrisch wenig zur Definition des Complexes geeignet.

24. Diesen zu einer Form vierten Grades gehörigen linearen Complex kann man nun, vermöge des Satzes in Nr. 3, in ähnlicher Weise zur Construction von Polaren benutzen, wie den Bündel um $\mathfrak{U}$ bei der Form dritten Grades.

Sind drei Punkte O, O', O'' auf R^3 gegeben, so construire man die Regelschaar, welche deren Tangenten trifft. Dieselbe hat mit dem Complexe U zwei Gerade gemein.

Sucht man die vierte Tangente der R^3, welche von der einen derselben getroffen wird, und dann die zweite Transversale aller vier Tangenten, so gehört diese sowohl zur Regelschaar, als zum Complex U, also ist sie die zweite gemeinsame Gerade. *Beide Geraden treffen mithin dieselbe vierte Tangente; deren Berührungspunkt ist die Polare von O, O', O'' in Bezug auf U.*

Gehört die Regelschaar ganz dem Complexe U an, so ist $O\,O'\,O''$ apolar zu U. Da also jeder Punkt O zu einem apolaren Tripel gehört (Nr. 18), so giebt es in der linearen Congruenz der Strahlen des Complexes U, welche die Tangente von O treffen, eine Regelschaar, welche noch zwei Tangenten begegnet.

Fallen die drei Punkte in einen, O, zusammen, so geht die Regelschaar der die drei Tangenten treffenden Geraden in den zweifachen Strahlbüschel (O, ω) über, wobei ω die Osculationsebene von O ist; denn jeder Strahl dieses Büschels trifft die Developpable in drei vereinigten Punkten auf der Tangente von O. Der ganze Büschel gehört dem Complexe N an; derjenige Strahl also desselben, der zum Complexe U gehört, demnach zu U und N, mithin *der von O ausgehende und die beiden Tangententransversalen r, s von U treffende Strahl schneidet noch eine Tangente, welche in der Polare von O, O, O (reinen dritten Polare von O) berührt.*

25. Die drei Punkte der (ersten) Polare eines Punktes O sind bekanntlich die, welche ihn zur reinen dritten Polare haben. Wir haben

folglich diejenigen Punkte von R^3 zu suchen, von denen eine die Transversalen r, s und die Tangente von O treffende Gerade ausgeht. Alle Geraden, welche r, s schneiden (und deshalb zu der den beiden Complexen N und U gemeinsamen Congruenz gehören) und ausserdem noch die cubische Raumcurve, erzeugen eine Regelfläche sechsten Grades (die von Herrn *Voss* a. a. O. S. 169 erwähnte); da sie in dem der Raumcurve angehörigen Nullsysteme N sich befindet, so ist jene eine Haupttangentencurve auf ihr; mithin hat die Tangente derselben in O mit ihr dort drei unendlich nahe Punkte und ausserdem noch drei andere gemein. Die Erzeugenden, welche durch die letzteren gehen, treffen R^3 in den Punkten der Polare von O.

Oder: die Geraden, welche r, s und die Tangente von O treffen, bilden eine dem Complexe N angehörige Regelschaar; diejenige unter ihnen, welche durch O geht, befindet sich als Gerade dieses Complexes in der Schmiegungsebene von O; folglich berührt diese Ebene das die Schaar tragende Hyperboloid in O, so dass R^3 diese Fläche in O osculirt und nur noch drei weitere Punkte mit ihr gemein hat: die der Polare von O.

Die Regelfläche zweiten Grades also, welche durch die Tangente des Punktes O und die Tangententransversalen r, s des Quadrupels U gelegt ist, osculirt die cubische Raumcurve in O und schneidet sie in den drei Punkten der Polare von O in Bezug auf U.

Die beiden Treffgeraden der Tangenten dieser vier Punkte befinden sich im Complexe U (Nr. 3).

26. Ist O'' ein Punkt der Polare von O, O', so fällt die Polare von O, O', O'' ebenfalls nach O''; folglich müssen die beiden Tangententransversalen des Quadrupels O, O', O'', O'', welche also beide die Tangenten von O, O' treffen, während die eine durch O'' geht und die andere in der Schmiegungsebene von O'' liegt, zum Complexe U gehören. *Mithin wird das Hyperboloid, welches die zum Complexe U gehörige und auf die Tangenten von O, O' sich stützende Regelschaar trägt, der cubischen Raumcurve R^3 ausser in den Punkten O, O', in denen es sie berührt, noch in den beiden Punkten der Polare von O, O' begegnen, oder* (dual) *von zwei weiteren Schmiegungsebenen der Curve berührt werden, welche sie in denselben Punkten osculiren.*

Lässt man O, O' in den Punkt O zusammenfallen, so geht die Regel-

schaar über in die beiden im Complexe U *befindlichen Strahlbüschel, von welchen der eine zum Punkte* O, *der andere zu dessen Osculationsebene* ω *gehört. Die beiden Punkte, in denen die Ebene des ersteren die Curve* R^3 *nochmals schneidet, oder die Osculationspunkte der beiden weiteren Schmiegungsebenen vom Scheitel des zweiten Büschels bilden die Polare von* O, O.

Es geschehe diese Construction insbesondere für einen der Punkte U selbst. Z. B. die zu A gehörige Ebene im Complexe U enthält die Tangente von A als Gerade des Complexes (Nr. 20); also vereinigt sich einer der beiden weiteren Schnitte mit A; in der That, es besteht ja auch die Polare von A, A in Bezug auf $ABCD$ aus A und der Polare A' von A, A in Bezug auf B, C, D. Mithin verbindet unsere Ebene die Tangente von A mit dem Punkte A', geht daher nach Nr. 6 durch den Nullpunkt der Ebene BCD; und man erhält folgende *Construction der den Punkten* A, B, C, D *zugehörigen Ebenen im Complexe* U, *bezüglich der ihren Schmiegungsebenen zugehörigen Punkte:*

Man verbindet die Tangente des betreffenden Punktes mit dem Nullpunkte der Ebene der drei andern, bez. man schneidet jene Tangente mit dieser Ebene selbst. Dadurch ist der Complex U in einer gewissen einfachen Weise bestimmt, indem von ihm acht Strahlbüschel bekannt sind.

Ist H ein Punkt des *Hesse*schen Quadrupels, so vereinigen sich (Nr. 17) die Punkte der Polare von H, H; *die Punkte des Hesseschen Quadrupels sind also diejenigen auf* R^3, *deren zugehörige Ebenen im Complexe* U *die Curve berühren, also eine Tangente derselben enthalten, oder deren Schmiegungsebenen ihren zugehörigen Punkt auf dieser Tangente haben.*

Ist H' der Punkt, in den die Punkte der Polare von H, H sich vereinigen, oder der Berührungspunkt der eben genannten Tangente, so besteht die Regelschaar der die Tangenten von H, H, H' treffenden Geraden aus dem Büschel, der aus H die Tangente von H' projicirt, und demjenigen in der Schmiegungsebene von H um die Spur der Tangente von H'. Beide Büschel gehören nach dem eben Gesagten ganz zum Complexe U; folglich ist H, H, H' ein zu U apolares Tripel (Nr. 24, vgl. Nr. 17).

Münster i. W., den 4. Juni 1878.

Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Wenn die beiden bilinearen Formen

$$A' = \Sigma a'_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta, \qquad A'' = \Sigma a''_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$$

der Variabeln $x_1, y_1, \cdots x_n, y_n$ durch die linearen Substitutionen

$$(P.)\quad x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha}\, x'_\gamma, \qquad (Q.)\quad y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta}\, y'_\delta$$

in die beiden Formen

$$B' = \Sigma b'_{\gamma\delta}\, x'_\gamma\, y'_\delta, \qquad B'' = \Sigma b''_{\gamma\delta}\, x'_\gamma\, y'_\delta$$

transformirt werden, so geht die Form

$$A = rA' + A'' = \Sigma a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$$

mit dem unbestimmten Parameter r durch die nämlichen Substitutionen in

$$B = rB' + B'' = \Sigma b_{\gamma\delta}\, x'_\gamma\, y'_\delta$$

über. Sind die Determinanten der Substitutionen P, Q von Null verschieden, so verwandeln die inversen Substitutionen

$$(R.)\quad x'_\gamma = \sum_\alpha r_{\alpha\gamma}\, x_\alpha, \qquad (S.)\quad y'_\delta = \sum_\beta s_{\delta\beta}\, y_\beta$$

die Form B wieder in A. Giebt man dem Parameter r alle möglichen Werthe, so heisst die Gesammtheit der Formen $rA' + A''$ eine *Schaar* von Formen, und zwei Formenschaaren, welche in der angegebenen Weise gegenseitig in einander transformirt werden können, werden *äquivalent* genannt. Wenn die Determinanten der Schaaren A und B nicht identisch verschwinden, so besteht nach Herrn *Weierstrass* die nothwendige und hinreichende Bedingung der Aequivalenz darin, dass (für $\lambda = 1, 2, \dots n$) der grösste gemeinsame Divisor d_λ der Determinanten λten Grades von A demjenigen der Determinanten λten Grades von B gleich ist. Da die Gleichung $A = B$ durch die Substitutionen P und S zu einer identischen wird, so ist

$$\sum_\alpha p_{\gamma\alpha}\, a'_{\alpha\beta} = \sum_\delta b'_{\gamma\delta}\, s_{\delta\beta}, \quad \sum_\alpha p_{\gamma\alpha}\, a''_{\alpha\beta} = \sum_\delta b''_{\gamma\delta}\, s_{\delta\beta}.$$

Sind nun A und B äquivalent, so müssen diese $2n^2$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den $2n^2$ Unbekannten $p_{\gamma\alpha}$, $s_{\delta\beta}$ eine verschwindende Determinante haben, und man muss den willkürlichen Constanten, welche in ihre allgemeinste Lösung eingehen, solche Werthe beilegen können, dass die Determinanten $n$ten Grades $|p_{\gamma\alpha}|$ und $|s_{\delta\beta}|$ von Null verschieden sind. So erhält man die Substitution P und durch Auflösung der linearen Gleichungen S die Substitution Q.

Durch rationale Operationen kann man also entscheiden, ob zwei gegebene Formen äquivalent sind oder nicht, und durch rationale Operationen kann man im ersteren Falle alle Substitutionen finden, welche die eine in die andere transformiren. Dagegen gehen die Beweise, die mir für den Satz des Herrn *Weierstrass* bekannt sind*), sämmtlich durch irrationale Operationen hindurch; denn sie beruhen auf der Transformation von A in eine reducirte Form, deren Coefficienten von den Wurzeln der Gleichung $|a_{\alpha\beta}| = 0$ abhängen. Ich hatte mir daher schon vor langer Zeit die Aufgabe gestellt, für jenen Satz einen Beweis zu finden, in welchem nur rationale Operationen vorkommen. Die Lösung derselben (§. 13) gelang mir aber erst, nachdem ich das zahlentheoretische Problem behandelt hatte, welches den Gegenstand dieser Abhandlung bildet.

Ich betrachte in derselben die verschiedenen Gestalten, welche eine bilineare Form mit ganzzahligen Coefficienten annimmt, wenn man für beide Reihen von Variabeln (§§. 1—7) oder nur für die eine Reihe (§. 12) neue Variabeln einführt. In den §§. 8—11 mache ich von der ersten Untersuchung Anwendungen auf die Theorie der linearen Gleichungen und Congruenzen, welche die Grundlage der zweiten Untersuchung bildet**).

---

*) *Weierstrass, Monatsber. d. Berl. Ak.* 1868. — *Kronecker, ebenda* 1874. — *Camille Jordan, Compt. rend.* 1871, II. *sém., p.* 787 und *Liouv. Journ.* 1874, *p.* 35. — *Darboux, Liouv. Journ.* 1874, *p.* 347. — *Hamburger,* d. J. Bd. 76, S. 113.

**) Erst nach Vollendung dieser Arbeit kamen mir die Abhandlungen des Herrn *Smith:*

On Systems of Linear Indeterminate Equations and Congruences, Phil. Trans. vol. 151, *p.* 293.

On the Arithmetical Invariants of a Rectangular Matrix, of which the Constituents are Integral Numbers, Proceedings of the London Math. Soc. 1873, *p.* 236.

On Systems of Linear Congruences, ebenda p. 241.

zu Gesicht. Die erste werde ich im folgenden mit *Sm.* citiren.

§. 1. Die Bedingungen der Aequivalenz bilinearer Formen.

Gegeben sei ein endliches System A von Grössen $a_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, \dots m$; $\beta = 1, \dots n$), die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind. Wenn in demselben alle Determinanten $(l+1)$ten Grades verschwinden, die $l$ten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so heisst l der *Rang* des Systems. Sind die Elemente $a_{\alpha\beta}$ reelle ganze Zahlen (oder ganze Functionen eines Parameters r), so sei d_λ der (positive) grösste gemeinsame Divisor aller Determinanten λten Grades von A, falls $\lambda \leqq l$, und $d_\lambda = 0$, falls $\lambda > l$ ist. Da jede Determinante λten Grades eine homogene lineare Function von Determinanten $(\lambda - 1)$ten Grades ist, so ist d_λ durch $d_{\lambda-1}$ theilbar. Der Quotient $e_\lambda = \frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}}$ ($e_1 = d_1$, $e_{l+\mu} = 0$) heisst der λte Elementartheiler des Systems A. Ich werde zeigen, dass e_λ durch $e_{\lambda-1}$ theilbar ist. Wenn daher die Werthe der l Elementartheiler von A in beliebiger Reihenfolge gegeben sind, so braucht man sie nur der Grösse nach zu ordnen, um zu wissen, welcher der λte ist. Um eine bequeme und übersichtliche Vereinigung der Zahlen des Systems, zu welchen man noch beliebig viele Zeilen und Colonnen verschwindender Elemente hinzufügen kann, zu erhalten, will ich die Elemente der αten Zeile mit einer Variabeln x_α und die der βten Colonne mit y_β multipliciren und addiren und so das System A unter dem Bilde einer bilinearen Form

$$A = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$$

zusammenfassen, welche mit demselben Buchstaben bezeichnet werden wird, wie das System der Elemente $a_{\alpha\beta}$ und als Repräsentant des Systems ihrer Coefficienten zu betrachten ist. Wenn die Form A durch die Substitutionen

$$(P.)\quad x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha}\, x'_\gamma, \qquad (Q.)\quad y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta}\, y'_\delta,$$

deren Coefficienten ganze Zahlen sind, in die Form

$$B = \Sigma\, b_{\gamma\delta}\, x'_\gamma\, y'_\delta$$

übergeht, so heisst B *unter* A *enthalten.* Dabei kann die Anzahl der neuen Variabeln derjenigen der ursprünglichen gleich oder grösser oder kleiner

sein. Werden mit P und Q die Systeme der Substitutionscoefficienten $p_{\alpha\beta}$ und $q_{\alpha\beta}$ oder auch die bilinearen Formen

$$P = \Sigma p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad Q = \Sigma q_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

bezeichnet, so sage ich, die Form A geht durch die Substitutionen P, Q in B über. Dann besteht die identische Gleichung

$$\Sigma a_{\alpha\beta} \frac{\partial P}{\partial y_\alpha} \frac{\partial Q}{\partial x_\beta} = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

oder in der von mir eingeführten*) symbolischen Bezeichnung

$$PAQ = B.$$

Jede Determinante λten Grades des Systems B der Coefficienten der Form B ist eine homogene lineare Function der Determinanten λten Grades von A, also durch d_λ theilbar. Folglich ist auch der grösste gemeinsame Divisor d'_λ der Determinanten λten Grades von B durch d_λ theilbar, und mithin der Rang von B nicht grösser als der Rang von A. Zwei Formen, die sich gegenseitig enthalten, heissen *äquivalent.* Sind A und B äquivalent, so ist also nicht nur d'_λ durch d_λ, sondern auch d_λ durch d'_λ theilbar, mithin $d_\lambda = d'_\lambda$, daher auch $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = \frac{d'_\lambda}{d'_{\lambda-1}}$, und demnach der Rang von A gleich dem von B. Ich werde beweisen, dass diese Bedingungen nicht nur erforderlich, sondern auch genügend sind, also der Satz gilt:

I. *Damit zwei bilineare Formen äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler der einen denen der andern der Reihe nach gleich sind.*

Ich werde aber im folgenden zunächst den Begriff der Aequivalenz etwas enger fassen. Ist die Anzahl der Variabeln x'_γ derjenigen der Variabeln x_α gleich, so ist $P = \Sigma p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ eine Form von m^2 Variabeln, deren Determinante ich mit $|P| = |p_{\alpha\beta}|$ bezeichne und die *Substitutionsdeterminante* oder den *Transformationsmodul* nenne. Zwei Formen A und B sollen nun äquivalent heissen, wenn A durch Substitutionen in B übergeht, deren Determinanten gleich ± 1 (*unimodular*) sind. Da dann die

*) „*Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*" d. J. Bd. 84. Ich werde diese Abhandlung im folgenden mit *Fr.* citiren.

inversen Substitutionen, welche B in A verwandeln, auch ganze Coefficienten haben, so müssen zwei Formen, welche in diesem Sinne äquivalent sind, es auch in dem früheren sein. Ich werde aber zeigen, dass zwei Formen, die sich gegenseitig enthalten, auch stets durch unimodulare Substitutionen in einander transformirt werden können*), so dass sich die zweite engere Definition vollständig mit der ersten weiteren deckt.

§. 2. Unimodulare Determinanten.

Da im folgenden vielfach von unimodularen Determinanten Gebrauch gemacht wird, so will ich hier kurz diejenige Construction derselben angeben, welche *Gauss* (D. A., §. 279) gelehrt hat. Vier andere sind von *Jacobi* (d. J. Bd. 69) auseinandergesetzt worden.

I. *Ist $m < n$, bewegen sich α und β von* 1 *bis n, $\varkappa$ und λ von* 1 *bis m, ist $e_{\alpha\beta}$ gleich* 0 *oder* 1, *je nachdem α und β gleich oder verschieden sind, sind $a_{\varkappa\alpha}$ m Zeilen und $b_{\alpha\varkappa}$ m Colonnen von je n Zahlen, zwischen denen die Relationen*

$$(1.)\qquad \sum_{\varkappa} a_{\varkappa\alpha}\, b_{\alpha\lambda} = e_{\varkappa\lambda}$$

bestehen, so kann man eine unimodulare Determinante $n$ten Grades $|a_{\alpha\beta}| = 1$ construiren, in welcher der Coefficient von $a_{\varkappa\alpha}$ gleich $b_{\alpha\varkappa}$ ist.

Da $m < n$ ist, so giebt es n ganze Zahlen a_α ohne gemeinsamen Theiler, welche den m homogenen linearen Gleichungen

$$\sum_{\alpha} a_\alpha\, b_{\alpha\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

genügen (vgl. d. J. Bd. 82, S. 236). Werden dann n Zahlen b_α so bestimmt, dass

$$\sum_{\alpha} a_\alpha\, b_\alpha = 1$$

ist, so sei

$$\sum_{\alpha} a_{\varkappa\alpha}\, b_\alpha = h_\varkappa.$$

---

*) Dabei muss man sich vorstellen, dass beide Formen von gleich vielen Variabeln abhängen, also wenn die eine weniger enthält, zu ihr noch Glieder mit verschwindenden Coefficienten hinzudenken.

Setzt man nun

$$a_{m+1,\alpha} = a_\alpha, \quad b_{\alpha,m+1} = b_\alpha - \sum_\lambda h_\lambda\, b_{\alpha\lambda},$$

so ist

$$\sum_\alpha a_{m+1,\alpha}\, b_{\alpha\lambda} = 0 = e_{m+1,\lambda},$$

$$\sum_\alpha a_{\varkappa\alpha}\, b_{\alpha,m+1} = \sum_\alpha a_{\varkappa\alpha}\, b_\alpha - \sum_\lambda h_\lambda \big(\sum_\alpha a_{\varkappa\alpha}\, b_{\alpha\lambda}\big) = h_\varkappa - \sum_\lambda h_\lambda\, e_{\varkappa\lambda} = h_\varkappa - h_\varkappa = 0 = e_{\varkappa,m+1}.$$

$$\sum_\alpha a_{m+1,\alpha}\, b_{\alpha,m+1} = \Sigma\, a_\alpha\, b_\alpha - \sum_\lambda h_\lambda \big(\sum_\alpha a_\alpha\, b_{\alpha\lambda}\big) = 1 = e_{m+1,m+1}.$$

Es ist also zu den m Zeilen $a_{\varkappa\alpha}$ eine $(m+1)$te Zeile und zu den m Colonnen $b_{\alpha\varkappa}$ eine $(m+1)$te Colonne hinzugefügt, so dass die Gleichungen (1.) für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots m, m+1$ gelten. Ist $m+1 < n$, so kann man in derselben Weise eine $(m+2)$te Zeile und Colonne hinzufügen, u. s. w., bis man zwei Systeme von n^2 Grössen hat, zwischen denen für $\varkappa, \lambda = 1, 2 \dots n$ die Gleichungen (1.) bestehen.

Aus denselben folgt aber

$$|a_{\alpha\beta}|\ |b_{\alpha\beta}| = |e_{\alpha\beta}| = 1,$$

und folglich entweder

$$|a_{\alpha\beta}| = 1, \quad |b_{\alpha\beta}| = 1$$

oder

$$|a_{\alpha\beta}| = -1, \quad |b_{\alpha\beta}| = -1.$$

Da die Relationen (1.) ungeändert bleiben, wenn man die Vorzeichen von $a_{n\alpha}$ und $b_{\alpha n}$ in die entgegengesetzten verwandelt, so kann man nach Belieben die einen oder die andern Gleichungen herstellen.

Sind also z. B. a_α, b_α $2n$ Zahlen, zwischen denen die Gleichung $\Sigma\, a_\alpha\, b_\alpha = 1$ besteht, so kann man eine unimodulare Determinante angeben, deren erste Zeile die Zahlen a_α bilden, und in welcher der Coefficient von a_α gleich b_α ist.

§. 3. Auflösung der Gleichung $\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = f$.

I. *Ist f der grösste gemeinsame Divisor der Coefficienten der bilinearen Form $A = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$, so ist die Gleichung $A = f$ in ganzen Zahlen lösbar.*

Der Index α möge die Zahlen von 1 bis m, der Index β die von 1 bis n durchlaufen. Man nehme n beliebige Zahlen ohne gemeinsamen Theiler q_β, für welche die m Ausdrücke

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta}\, q_\beta = h\, P_\alpha$$

nicht sämmtlich verschwinden. Sei h der grösste gemeinsame Theiler derselben, also von Null verschieden, positiv und durch f theilbar. Weil dann die Zahlen P_α keinen Divisor gemeinsam haben, so kann man die Zahlen p_α so bestimmen, dass

$$\Sigma P_\alpha p_\alpha = 1, \quad \text{also } \Sigma a_{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta = h$$

wird. Ist nun $h = f$, so ist die Aufgabe gelöst. Ist aber $h > f$, und ist h' der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} p_\alpha = h' Q_\beta,$$

so ist

$$h' \Sigma Q_\beta q_\beta = h,$$

also h' ein Divisor von h. Dann bestimme man die Zahlen q'_β so, dass

$$\Sigma Q_\beta q'_\beta = 1, \quad \text{also } \Sigma a_{\alpha\beta} p_\alpha q'_\beta = h'$$

wird. Ist $h' < h$ und h'' der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} q'_\beta = h'' P'_\alpha,$$

so ist

$$h'' \Sigma P'_\alpha p_\alpha = h',$$

also h'' ein Divisor von h'. Dann bestimme man die Zahlen p'_α so, dass

$$\Sigma P'_\alpha p'_\alpha = 1, \quad \text{also } \Sigma a_{\alpha\beta} p'_\alpha q'_\beta = h''$$

wird. Ist $h'' < h'$, so fahre man in derselben Weise fort.

Da nun die Zahlen $h \geqq h' \geqq h'' \geqq \cdots$ sämmtlich von Null verschieden, positiv und durch f theilbar sind, so muss einmal $h^{(\nu)} = h^{(\nu+1)}$ werden. Spätestens muss, wenn $h^{(\nu)} = f$ ist, auch $h^{(\nu+1)} = f$ sein. Weil jede der Zahlen $h, h', \ldots$ durch die Form A dargestellt ist, so ist im letzteren Falle bereits die Gleichung $A = f$ gelöst.

Der Beschreibung des Weges, der im Falle $h^{(\nu)} = h^{(\nu+1)}$ einzuschlagen ist, schicke ich folgende Bemerkungen voraus: Geht die Form A, wenn man x_α durch $\sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x_\gamma$ und y_β durch $\sum_\delta q_{\beta\delta} y_\delta$ ersetzt, in $B = \Sigma b_{\gamma\delta} x_\gamma y_\delta$ über, und sind beide Substitutionsdeterminanten gleich ± 1, so ist der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen $a_{\alpha\beta}$ gleich demjenigen der Zahlen $b_{\gamma\delta}$, und aus jeder Lösung der Gleichung $B = f$ ergiebt sich eine Lösung der Gleichung $A = f$. Enthält ferner $A = y_1 \Sigma a_\alpha x_\alpha$ nur eine Variable der einen Reihe, so löst man die Gleichung $A = f$, indem man $y_1 = 1$ setzt und $\Sigma a_\alpha x_\alpha = f$ macht.

Sei nun der bequemeren Bezeichnung halber $h = h'$, also

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta}\, q_\beta = h\, P_\alpha,\quad \sum_\alpha a_{\alpha\beta}\, p_\alpha = h\, Q_\beta,\quad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, p_\alpha\, q_\beta = h.$$

Da die Zahlen q_β keinen Divisor gemeinsam haben, so kann man eine Determinante $n$ten Grades $|q_{\beta\delta}| = 1$ bestimmen, in welcher die Elemente der ersten Colonne $q_{\beta 1} = q_\beta$ sind, und ebenso eine Determinante $m$ten Grades $|p_{\gamma\alpha}| = 1$, in welcher die Elemente der ersten Zeile $p_{1\alpha} = p_\alpha$ sind. Geht nun A in B über, wenn man x_α durch $\sum_\gamma p_{\gamma\alpha}\, x_\gamma$ und y_β durch $\sum_\delta q_{\beta\delta}\, y_\delta$ ersetzt, so ist

$$b_{11} = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, p_{1\alpha}\, q_{\beta 1} = h,$$
$$b_{1\delta} = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, p_{1\alpha}\, q_{\beta\delta} = h \sum_\beta Q_\beta\, q_{\beta\delta} = h\, c_{1\delta},$$
$$b_{\gamma 1} = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, p_{\gamma\alpha}\, q_{\beta 1} = h \sum_\alpha P_\alpha\, p_{\gamma\alpha} = h\, c_{\gamma 1}.$$

Nun ist aber

$$b_{11}\, B = \frac{\partial B}{\partial y_1}\, \frac{\partial B}{\partial x_1} + B_1,$$

wo

$$B_1 = \Sigma (b_{11}\, b_{\gamma\delta} - b_{\gamma 1}\, b_{1\delta})\, x_\gamma\, y_\delta$$

die Variabeln x_1, y_1 nicht enthält. Mithin ist

$$B = h\,(x_1 + c_{21}\, x_2 + \cdots + c_{m1}\, x_m)\,(y_1 + c_{12}\, y_2 + \cdots + c_{1n}\, y_n) + \Sigma (b_{\gamma\delta} - b_{\gamma 1} c_{1\delta})\, x_\gamma\, y_\delta.$$

Ersetzt man also

$$x_1 + c_{21}\, x_2 + \cdots + c_{m1}\, x_m$$

durch x_1 und lässt $x_2, \ldots x_m$ ungeändert (was eine unimodulare Substitution ist), ersetzt man desgleichen

$$y_1 + c_{12}\, y_2 + \cdots + c_{1n}\, y_n$$

durch y_1, so geht B in

$$C = h\, x_1\, y_1 + G$$

über, wo $G = \Sigma g_{\gamma\delta}\, x_\gamma\, y_\delta$ die Variabeln x_1, y_1 nicht enthält. Den Fall, wo G identisch verschwindet, also $h = f$ ist, haben wir bereits erledigt. Ist die Form G nicht gleich Null, so sei g der grösste gemeinsame Divisor ihrer Coefficienten. Nehmen wir nun an, dass für Formen G, welche mindestens eine Variable jeder Reihe weniger enthalten als A, die Aufgabe bereits gelöst ist, so kann man die Zahlen u_γ, v_δ so bestimmen, dass

$$\Sigma\, g_{\gamma\delta}\, u_\gamma\, v_\delta = g$$

wird. Da f der grösste gemeinsame Divisor von g und h ist, so kann

man zwei Zahlen z und w finden, welche der Gleichung

$$hz + gw = f \text{ oder } hz + w\Sigma g_{\gamma\delta} u_\gamma v_\delta = f$$

genügen. Zerlegt man nun z irgend wie in zwei Factoren $x_1\, y_1$ und w in uv und setzt $uu_\gamma = x_\gamma$, $vv_\delta = y_\delta$, so erhält man eine Lösung der Gleichung $C=f$, aus der sich eine Lösung der Gleichung $A=f$ ableiten lässt.

Diese Methode, die Gleichung $A=f$ zu lösen, ist dem Verfahren nachgebildet, welches *Gauss* (D. A. 236) gelehrt hat (Vgl. Anm. 3.). Ich füge dazu noch die folgenden Bemerkungen:

1) Da $\Sigma P_\alpha p_\alpha = 1$ und $\Sigma Q_\beta q_\beta = 1$ ist, so kann man nach §. 2 die Determinante $|p_{\gamma\alpha}| = 1$ so bestimmen, dass nicht nur $p_{1\alpha} = p_\alpha$, sondern auch der Coefficient von $p_{1\alpha}$ in dieser Determinante gleich P_α wird; und analog die Determinante $|q_{\beta\delta}|$. Dann ist $b_{\gamma 1} = b_{1\delta} = 0$ und A geht durch die Substitutionen P, Q direct in $hx_1 y_1 + G$ über, wo G die Variabeln x_1, y_1 nicht enthält.

2) Ebenso wie oben die Form A durch unimodulare Substitutionen in $h_1 x_1 y_1 + A_1$ transformirt worden ist, wo A_1 die Variabeln $x_1\, y_1$ nicht enthält, kann die Form A_1, falls sie nicht Null ist, in $h_2 x_2 y_2 + A_2$ umgeformt werden, wo A_2 die Variabeln x_1, y_1, x_2, y_2 nicht enthält u. s. w. Da man endlich zu einer verschwindenden Form gelangen muss, so wird A auf diese Weise schliesslich in

$$H = h_1 x_1 y_1 + h_2 x_2 y_2 + \cdots + h_l x_l y_l$$

transformirt. Die Coefficienten dieser der Form A äquivalenten Form H werden in §. 6 genauer untersucht werden.

3) Ist der Rang l der Form A gleich 2, ist $f=1$, $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, $a_{\alpha\alpha} = 0$, $m = n$, so muss in dem obigen Beweise, falls $h > 1$ ist, bereits $h' = 1$ sein. Denn setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta = (uv), \text{ also } (uu) = 0,\ (uv) = -(vu),$$

so ist die schiefe Determinante vierten Grades

$$\Sigma \pm (xx)\ (yy)\ (pp)\ (qq) = 0,$$

als lineare Verbindung von lauter Determinanten vierten Grades von A. Folglich ist auch ihre Quadratwurzel

$$(xy)\ (pq) + (xp)\ (qy) + (xq)\ (yp) = 0,$$

oder es ist

$$h A = (\Sigma h P_\alpha x_\alpha) \; (\Sigma h' Q_\beta y_\beta) - (\Sigma h P_\beta y_\beta) \; (\Sigma h' Q_\alpha x_\alpha)$$

und mithin

$$a_{\alpha\beta} = h' (P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha).$$

Wenn also der grösste gemeinsame Divisor f der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ gleich 1 ist, so muss $h' = 1$ sein. Damit $l = 2$ sei, also die Determinanten dritten Grades von A sämmtlich Null seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Hauptunterdeterminanten vierten Grades von A, die Quadrate sind, alle verschwinden (d. J. Bd. 82, S. 244). Es ergiebt sich folglich der Satz:

II. *Wenn die n^2 Zahlen $a_{\alpha\beta}$ keinen Theiler gemeinsam haben und den Gleichungen*

$$a_{\alpha\alpha} = 0, \; a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0, \; a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} + a_{\alpha\gamma} a_{\delta\beta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} = 0$$

genügen, so kann man $2n$ Zahlen P_α, Q_β so bestimmen, dass $a_{\alpha\beta} = P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha$ wird.

Ist $h' = 1$, so muss auch $h'' = 1$ sein. Nun bleibt aber die soeben ausgeführte Rechnung ungeändert, wenn man für die Zahlen q_β die Zahlen q'_β und für die Zahlen P_α die Zahlen P'_α nimmt. Daraus folgt:

III. *Wenn die n^2 Zahlen $a_{\alpha\beta}$ keinen Theiler gemeinsam haben und den Gleichungen*

$$a_{\alpha\alpha} = 0, \; a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0, \; a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} + a_{\alpha\gamma} a_{\delta\beta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} = 0$$

genügen, so kann man $2n$ Zahlen p_α, q_β so bestimmen, dass, falls man $\sum\limits_\beta a_{\alpha\beta} q_\beta = P_\alpha$ und $\sum\limits_\alpha a_{\alpha\beta} p_\alpha = Q_\beta$ setzt, $a_{\alpha\beta} = P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha$ wird.

§. 4. Auflösung der Gleichung $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = f$ nach einer anderen Methode.

I. *Ist f der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen $a_{\alpha\beta}$, so kann man $y_1, y_2, \ldots y_n$ so wählen, dass auch die Zahlen*

$$A_\alpha = a_{\alpha1} y_1 + a_{\alpha2} y_2 + \cdots + a_{\alpha n} y_n$$

keinen grösseren Divisor als f gemeinsam haben.

Denn die Zahlen A_α sind sämmtlich durch f theilbar, und wenn

$$\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \Sigma A_\alpha x_\alpha = f$$

ist, so können sie nicht alle durch eine grössere Zahl als f theilbar sein.

Unabhängig von §. 3 lässt sich der obige Satz folgendermassen*) beweisen:

Sind a_α, b_α $2m$ Zahlen ohne gemeinsamen Divisor, so kann man x so wählen, dass die m Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha$ nicht sämmtlich durch eine beliebig gegebene Primzahl p theilbar sind. Ist nämlich b_α nicht durch p theilbar, und $x \equiv 0$ (mod. p), so ist $a_\alpha x + b_\alpha$ nicht durch p theilbar; haben aber $b_1, \dots b_m$ alle den Divisor p, so können ihn $a_1, \dots a_m$ nicht sämmtlich haben; ist a_α nicht durch p theilbar und $x \equiv 1$ (mod. p), so ist $a_\alpha x + b_\alpha$ nicht durch p theilbar. Sind $p, q, \dots$ mehrere Primzahlen, so kann man x auch so wählen, dass die m Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha$ durch keine derselben sämmtlich theilbar sind. Denn mehreren Congruenzen $x \equiv 0$ oder 1 (mod. p), $x \equiv 0$ oder 1 (mod. q), ... kann man gleichzeitig Genüge leisten. Ist daher d eine beliebig gegebene Zahl, so kann man der Grösse x einen solchen Werth ertheilen, dass die $m+1$ Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha$ und d keinen Divisor gemeinsam haben. Ein gemeinsamer Theiler der m Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha$ geht auch in die Determinanten

$$a_\alpha (a_\beta x + b_\beta) - a_\beta (a_\alpha x + b_\alpha) = a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha$$

auf. Sind dieselben nicht alle Null, ist d ihr grösster gemeinsamer Divisor, und haben die $m+1$ Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha$ und d keinen Theiler gemeinsam, so können folglich auch die m Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha$ für sich keinen Theiler gemeinsam haben. Mithin kann man x und y so wählen (z. B. $y = 1$), dass die m Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha y$ keinen Divisor gemeinsam haben.

Sind aber die Determinanten $a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha$ sämmtlich Null, so ist $a_\alpha x + b_\alpha y = c_\alpha (ax + by)$, wo c_α der grösste gemeinsame Divisor von a_α und b_α ist. Da die $2m$ Zahlen a_α, b_α theilerfremd sind, so sind es auch die m Zahlen c_α und ebenso die beiden Zahlen a und b. Wählt man also x und y so, dass $ax + by = 1$ wird, so haben die m Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha y$ auch in diesem Falle keinen Divisor gemeinsam. Ist allgemeiner f der grösste gemeinsame Divisor der $2m$ Zahlen a_α, b_α, so kann man folglich den Variabeln x, y solche Werthe ertheilen, dass f auch der grösste gemeinsame Divisor der m Zahlen $a_\alpha x + b_\alpha y$ wird.

---

*) Der Fall, dass der Rang des Coefficientensystems gleich $m \leqq n$ ist, bietet hier besondere Vereinfachungen dar, so dass er auch ohne den Schluss von $n-1$ auf n leicht zu erledigen ist. Vgl. *Sm.* p. 314.

Nehmen wir nun an, der zu beweisende Satz sei für lineare Formen von $n-1$ Variabeln richtig. Ist dann g der grösste gemeinsame Theiler der Zahlen $a_{\alpha\delta}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots m;\ \delta = 2, 3, \ldots n)$, so kann man $v_2, v_3, \ldots v_n$ so wählen, dass g auch der grösste gemeinsame Theiler der m Zahlen

$$b_\alpha = a_{\alpha 2}\, v_2 + a_{\alpha 3}\, v_3 + \cdots + a_{\alpha n}\, v_n$$

wird. Da dann f der grösste gemeinsame Divisor der $2m$ Zahlen $a_{\alpha 1}, b_\alpha$ ist, so kann man y_1, v so wählen, dass auch die m Zahlen $a_{\alpha 1}\, y_1 + b_\alpha\, v$, oder wenn man $v v_\delta = y_\delta$ setzt, die m Zahlen

$$A_\alpha = a_{\alpha 1}\, y_1 + a_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + a_{\alpha n}\, y_n$$

keinen grösseren Divisor als f gemeinsam haben.

Alsdann kann man die m Zahlen x_α so bestimmen, dass

$$f = \Sigma A_\alpha\, x_\alpha = \Sigma a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$$

wird.

Ist f der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen $a_{\alpha\beta\gamma}$, so kann man die Zahlen z_γ so wählen, dass f auch der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen $\sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}\, z_\gamma = A_{\alpha\beta}$ wird. Alsdann kann man aber die Zahlen x_α, y_β so bestimmen, dass

$$f = \Sigma A_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma}\, x_\alpha\, y_\beta\, z_\gamma$$

wird. Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses ergiebt sich der Satz:

II. *Eine Function, welche in Bezug auf mehrere Reihen von Variabeln homogen und linear ist, kann jeden beliebigen Werth annehmen, welcher durch den grössten gemeinsamen Divisor ihrer Coefficienten theilbar ist.*

§. 5. Die Reduction einer bilinearen Form auf die Normalform.

Den Variabeln $x_1, \ldots x_m;\ y_1, \ldots y_n$ der bilinearen Form

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta,$$

deren Coefficienten den grössten gemeinsamen Divisor f_1 haben, kann man solche Werthe $x_\alpha = p_{1\alpha}$, $y_\beta = q_{\beta 1}$ ertheilen, dass $A = f_1$, also

$$\Sigma \frac{a_{\alpha\beta}}{f_1}\, p_{1\alpha}\, q_{\beta 1} = 1$$

wird. Daher sind die m Zahlen $p_{1\alpha}$ ohne gemeinsamen Theiler und ebenso die n Zahlen $q_{1\beta}$, und folglich kann man eine Determinante $m$ten Grades $|p_{\alpha\beta}| = 1$ und eine Determinante $n$ten Grades $|q_{\alpha\beta}| = 1$ bilden.

Ist dann

$$P = \Sigma\, p_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta, \qquad Q = \Sigma\, q_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$$

und

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta} \frac{\partial P}{\partial y_\alpha} \frac{\partial Q}{\partial x_\beta} = f_1\, \Sigma\, g_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = f_1\, G,$$

so ist $g_{11} = 1$, und mithin

$$G = \frac{\partial G}{\partial y_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + A_1,$$

wo die Form

$$A_1 = \Sigma\, (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha 1}\, g_{1\beta})\, x_\alpha\, y_\beta$$

die Variabeln x_1, y_1 nicht enthält. Ersetzt man

$$\frac{\partial G}{\partial y_1} = x_1 + g_{21}\, x_2 + \cdots + g_{m1}\, x_m$$

durch x_1 und lässt $x_2, \ldots x_m$ ungeändert (was eine unimodulare Substitution ist), ersetzt man desgleichen $\frac{\partial G}{\partial x_1}$ durch y_1, so erhält man die der Form A äquivalente Form

$$f_1\, x_1\, y_1 + f_1\, A_1 .$$

Wenn die Form A_1 nicht identisch verschwindet, und der grösste gemeinsame Divisor ihrer Coefficienten gleich f_2 ist, so kann sie auf die nämliche Weise in

$$f_2\, x_2\, y_2 + f_2\, A_2$$

transformirt werden, wo A_2 die Variabeln x_1, y_1, x_2, y_2 nicht enthält. Setzt man dies Verfahren so lange fort, bis man zu einer identisch verschwindenden Form A_l gelangt, so hat man A durch unimodulare Substitutionen in

$$(1.) \qquad F = f_1\, x_1\, y_1 + f_1 f_2\, x_2\, y_2 + f_1 f_2 f_3\, x_3\, y_3 + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_l\, x_l\, y_l$$

transformirt, oder wenn man

$$(2.) \qquad e_\lambda = f_1 f_2 \cdots f_\lambda$$

setzt, in

$$(3.) \qquad F = e_1\, x_1\, y_1 + e_2\, x_2\, y_2 + e_3\, x_3\, y_3 + \cdots + e_l\, x_l\, y_l.$$

Diese Form, in welcher e_λ von Null verschieden, positiv und durch $e_{\lambda-1}$ theilbar ist, heisst die *Reducirte* der Form A. (Für den Fall $l = m$ vgl. *Sm.* p. 314.) Der Rang von F ist gleich l, und weil e_λ durch $e_{\lambda-1}$ theilbar ist, so ist der grösste gemeinsame Divisor aller Determinanten λten Grades von F gleich

$$(4.) \qquad d_\lambda = e_1\, e_2 \cdots e_\lambda = f_1^\lambda\, f_2^{\lambda-1} \cdots f_\lambda .$$

Folglich ist

$$(5.)\qquad e_\lambda = \frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}}$$

der λte Elementartheiler der Form

$$(6.)\qquad F = d_1 x_1 y_1 + \frac{d_2}{d_1} x_2 y_2 + \frac{d_3}{d_2} x_3 y_3 + \cdots + \frac{d_l}{d_{l-1}} x_l y_l.$$

Da nun A der Form F äquivalent ist, so muss nach §.1 auch der Rang von A gleich l und der λte Elementartheiler von A gleich e_λ sein. Aus der Gleichung

$$(7.)\qquad f_\lambda = \frac{e_\lambda}{e_{\lambda-1}}$$

ergiebt sich daher der Satz:

I. *Ist in einem System von ganzen Zahlen, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind, d_λ der grösste gemeinsame Divisor aller Determinanten λ ten Grades, so sind nicht nur die Quotienten $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = e_\lambda$, sondern auch die Quotienten $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda-1}} = f_\lambda$ ganze Zahlen.*

Ist also $d_1 = d_2 = \cdots = d_\varkappa = 1$, mithin $e_1 = e_2 = \cdots = e_\varkappa = 1$ und $f_1 = f_2 = \cdots = f_\varkappa = 1$ und ist $d_{\varkappa+1} = e_{\varkappa+1} = f_{\varkappa+1}$ von 1 verschieden, so ist

$$d_l > d_{l-1} > \cdots > d_{\varkappa+1} > d_\varkappa = d_{\varkappa-1} = \cdots = d_1 = 1,$$

$$e_l \geqq e_{l-1} \geqq \cdots \geqq e_{\varkappa+1} > e_\varkappa = e_{\varkappa-1} = \cdots = e_1 = 1.$$

Zwei äquivalente Formen haben denselben Rang und dieselben Elementartheiler. Der Rang l ist durch die Elementartheiler in so fern mitbestimmt, als $e_{l+1} = 0$ und e_l von Null verschieden ist. Da nun die Coefficienten von F die Elementartheiler von F sind, so können zwei Reducirte, falls sie nicht identisch sind, nicht äquivalent sein. Zwei Formen ferner, welche dieselben Elementartheiler besitzen, können durch unimodulare Substitutionen in die nämliche Reducirte, und folglich auch in einander transformirt werden. Mithin ist die Uebereinstimmung der Elementartheiler die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz zweier Formen, oder die Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_l$ bilden ein vollständiges System von Invarianten der Form A.

Wenn z. B. zwei Formen denselben Rang l haben, und der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten l ten Grades für beide das nämliche Product verschiedener Primzahlen ist, so sind sie äquivalent.

Nennt man die Form $A' = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, x_\beta$ der Variabeln $x_1, \dots x_n$; $y_1, \dots y_m$ die *conjugirte* Form von A, so besitzen A und A' die nämlichen Elementartheiler. Folglich ist jede Form ihrer conjugirten äquivalent.

Wenn zwei Formen sich gegenseitig enthalten, so haben sie nach §. 1 dieselben Elementartheiler, und können mithin durch unimodulare Substitutionen in einander transformirt werden.

Ist der Rang l der Form A kleiner als m oder n, so ist A einer Form von l Variabelnpaaren, deren Determinante von Null verschieden ist, äquivalent (vgl. §. 3, Anm. 2). Ist aber $l = m = n$, enthält also die Form A von jeder Reihe n Variabeln, und ist ihre Determinante $\pm d$ von Null verschieden, so lässt sich A auf die Form

$$F = f_1\, x_1\, y_1 + f_1 f_2\, x_2\, y_2 + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n\, x_n\, y_n$$

reduciren, und es ist

$$d = f_1^n\, f_2^{n-1} \cdots f_n.$$

Die Zahl, welche angiebt, auf wie viele Arten d in dieser Weise dargestellt werden kann, ist daher die Anzahl $h(d)$ der Klassen nicht äquivalenter Formen, in welche die bilinearen Formen der nicht verschwindenden Determinante n ten Grades $\pm d$ zerfallen. Zerlegt man d in zwei theilerfremde Factoren $d'\, d''$, so ist, wie leicht zu sehen, $h(d) = h(d') \cdot h(d'')$. Ist a eine Primzahl und $d = a^\alpha$, so kann d auf so viele Arten in der obigen Weise dargestellt werden, wie der Exponent auf die Form

$$\alpha = n\alpha_1 + (n-1)\,\alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

gebracht werden kann. Diese Anzahl ist der Coefficient von x^α in der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(1-x)\,(1-x^2)\cdots(1-x^n)} = h_0 + h_1\, x + h_2\, x^2 + \cdots.$$

Sind folglich $a, b, c, \dots$ verschiedene Primzahlen, so zerfallen die Formen der Determinante $\pm d = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \dots$ in $h_\alpha\, h_\beta\, h_\gamma \dots$ Klassen (vgl. *Cayley*, d. J. Bd. 50, S. 315). Diese Zahl ist von den Primzahlen, welche in d aufgehen, unabhängig und nur durch die Grade bestimmt, in welchen diese Primzahlen in d enthalten sind.

Ist die Determinante der Form A von n Variabelnpaaren nicht gleich Null, so heisst

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & y_\alpha \\ x_\beta & 0 \end{vmatrix} : |a_{\alpha\beta}|$$

die *reciproke* Form von A (*Fr.* S. 7). Sind P und Q die Substitutionen, welche A in die reducirte Form

$$F = e_1 x_1 y_1 + e_2 x_2 y_2 + \cdots + e_n x_n y_n$$

transformiren, so folgt aus der Gleichung

$$P A Q = F$$

durch Uebergang zu den reciproken Formen und Multiplication mit der Constanten k (*Fr.* §. 2, II)

$$Q^{-1}(kA^{-1})P^{-1} = kF^{-1} = \frac{k}{e_1} x_1 y_1 + \frac{k}{e_2} x_2 y_2 + \cdots + \frac{k}{e_n} x_n y_n.$$

Ist k durch e_n theilbar*), so sind die Coefficienten der Formen kA^{-1} und kF^{-1} ganze Zahlen. Ebenso sind die Coefficienten der unimodularen Substitutionen Q^{-1} und P^{-1} ganze Zahlen. Da ferner $\frac{k}{e_\lambda}$ durch $\frac{k}{e_{\lambda+1}}$ theilbar ist, so ist kF^{-1} die Reducirte von kA^{-1}.

II. *Ist e_λ der λte Elementartheiler einer Form von n Variabelnpaaren mit nicht verschwindender Determinante und k durch e_n theilbar, so ist $\frac{k}{e_{n-\lambda+1}}$ der λte Elementartheiler der mit k multiplicirten reciproken Form.*

§. 6. Einfache Elementartheiler und Systeme zusammengesetzter Elementartheiler.

Aus dem Satze I, §. 5 ergiebt sich die Folgerung (vgl. *Cayley*, d. J. Bd. 50, S. 314):

I. *Ist eine Primzahl in dem grössten gemeinsamen Divisor aller Determinanten λten Grades eines Elementensystems im Grade δ_λ enthalten, so sind*

*) Nennt man einen Bruch a durch einen andern b theilbar, wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl ist, so kann man den Begriff des grössten gemeinsamen Divisors (Masses) auch auf Brüche ausdehnen. Der Nenner des grössten gemeinsamen Divisors mehrerer Brüche ist der Generalnenner derselben. Demnach ist $e_n e_{n-1} \ldots e_{\lambda+1} = \frac{d_n}{d_\lambda}$ der Generalnenner aller Determinanten $(n-\lambda)$ten Grades von A^{-1}.

nicht nur die ersten, sondern auch die zweiten Differenzen der Zahlen δ_λ *nicht negativ.*

Ist also $\varepsilon_\lambda = \delta_\lambda - \delta_{\lambda-1}$ und ist $\delta_\varkappa = 0$, $\delta_{\varkappa+1}$ nicht Null, so ist

$$\delta_l > \delta_{l-1} > \cdots > \delta_{\varkappa+1} > \delta_\varkappa = \delta_{\varkappa-1} = \cdots = \delta_1 = 0,$$

$$\varepsilon_l \geqq \varepsilon_{l-1} \geqq \cdots \geqq \varepsilon_{\varkappa+1} > \varepsilon_\varkappa = \varepsilon_{\varkappa-1} = \cdots = \varepsilon_1 = 0.$$

Jede Primzahl, welche in d_λ aufgeht, muss daher auch in e_λ enthalten sein, nur möglicherweise in einer niedrigeren Potenz. Ist, in Primfactoren zerlegt,

$$e_\lambda = a^{\alpha_\lambda} b^{\beta_\lambda} c^{\gamma_\lambda} \cdots,$$

so heissen a^{α_λ}, b^{β_λ}, ... $(\lambda = 1, 2, \dots l)$ die *einfachen Elementartheiler* *) des Systems A, und es wird a die Grundzahl, α der Grad des einfachen Elementartheilers a^α genannt. Wenn die einfachen Elementartheiler a^α, $a^{\alpha'}$, ... b^β, ... in irgend einer Reihenfolge sämmtlich bekannt sind, so kann man aus ihnen zufolge der Ungleichheit $\alpha_\lambda \geqq \alpha_{\lambda-1}$ leicht die Elementartheiler e_λ zusammensetzen. Die höchsten Potenzen von a, b, ... sind die Factoren von e_l, die nächsthöchsten die von e_{l-1}, u. s. w. Diese Bemerkung will ich benutzen, um die Elementartheiler der Form

$$H = h_1 x_1 y_1 + h_2 x_2 y_2 + \cdots + h_l x_l y_l$$

vom Range l zu bestimmen, deren Coefficienten h_λ sämmtlich von Null verschieden sind. Eine in $h_1 h_2 \dots h_l = d_l$ aufgehende Primzahl a sei in h_λ in der Potenz ϱ_λ enthalten, die grösste der Zahlen ϱ_λ sei α_l, die nächstgrösste α_{l-1} u. s. w. Dann enthält d_l die Primzahl a in der Potenz $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$. Die Determinanten $(l-1)$ten Grades von H, welche nicht verschwinden, $h_2 h_3, \cdots h_l$, $h_1 h_3 \cdots h_l$, $\cdots h_1 h_2 \cdots h_{l-1}$ enthalten die Primzahl a alle in der Potenz $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{l-1}$ und eine enthält sie in keiner höheren. Daher enthält sie der grösste gemeinsame Divisor d_{l-1} der Determinanten $(l-1)$ten Grades von H in der nämlichen Potenz. Folglich ist $\frac{d_l}{d_{l-1}} = e_l$ durch die $\alpha_l$te Potenz von a theilbar, ebenso

---

*) Herr *Kronecker* (Monatsber. d. Berl. Ak. 1874, März) braucht diesen Namen in einem ganz andern Sinne, nämlich für einen Elementartheiler a^α, dessen Exponent $\alpha = 1$ ist. Dafür kann man aber eben so bequem „Elementartheiler ersten Grades" sagen, also einen besonderen Namen leicht entbehren.

$\frac{d_{l-1}}{d_{l-2}} = e_{l-1}$ durch die α_{l-1}te u. s. w. Mithin sind die Zahlen a^{e_λ} $(\lambda = l, l-1, \dots 1)$ oder in anderer Reihenfolge die Zahlen a^{e_λ} die einfachen Elementartheiler von H mit der Grundzahl a. Man findet also die einfachen Elementartheiler von H, indem man jeden Coefficienten h_λ in Factoren zerlegt, die Potenzen verschiedener Primzahlen sind. Dann ist e_l das Product der höchsten Potenzen, in denen die verschiedenen Primzahlen in den Zahlen h_λ enthalten sind, e_{l-1} das Product der nächsthöchsten u. s. w., e_1 das Product der niedrigsten Potenzen. Daher ist e_l das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und e_1 der grösste gemeinsame Divisor der Coefficienten h_λ, und man erkennt so, dass der Begriff der Elementartheiler die Verallgemeinerung der Begriffe des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen und des grössten gemeinsamen Divisors zweier Zahlen auf Systeme von mehr als zwei Zahlen bildet. Nennt man nun l Zahlen h_λ ein *System zusammengesetzter Elementartheiler* der Form A vom Range l, wenn die Potenzen verschiedener Primzahlen, deren Producte sie sind, die sämmtlichen einfachen Elementartheiler von A sind, so erhält man die Sätze:

II. *Wird eine Form* $A = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$ *irgendwie durch unimodulare Substitutionen in* $H = \Sigma\, h_\lambda\, x_\lambda\, y_\lambda$ *transformirt, so ist die Anzahl der Variabelnpaare von* H *gleich dem Range von* A, *und die Coefficienten von* H *bilden ein System zusammengesetzter Elementartheiler von* A.

III. *Bilden die Zahlen* h_λ *irgend ein System zusammengesetzter Elementartheiler einer Form, so ist ihr die Form* $\Sigma\, h_\lambda\, x_\lambda\, y_\lambda$ *äquivalent.*

Eine Form heisst *zerlegbar*, wenn sie die Summe von zwei oder mehreren Formen ist, die keine Variable gemeinsam haben. Hängt z. B. A' nur von den Variabeln $x_1, \dots x_r$; $y_1, \dots y_s$ und A'' nur von den Variabeln $x_{r+1}, \dots x_m$; $y_{s+1}, \dots y_n$ ab, so ist $A = A' + A''$ in die beiden Theile A' und A'' zerlegbar. Jede von Null verschiedene Determinante λten Grades von A ist das Product einer Determinante $\varkappa$ten Grades von A' und einer $(\lambda-\varkappa)$ten Grades von A''. Der Rang einer zerlegbaren Form ist gleich der Summe der Rangzahlen der einzelnen Theile. Sind d_λ, d'_λ, d''_λ die grössten gemeinsamen Divisoren der Determinanten λten Grades in den Formen A, A', A'', so ist d_λ der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen d'_λ, $d'_{\lambda-1}\, d''_1$, $d'_{\lambda-2}\, d''_2, \cdots d'_1\, d''_{\lambda-1}$, d''_λ.

Nach §. 3 kann man, wenn k den Rang von A' und $l-k$ den von A'' bezeichnet, A' durch unimodulare Substitutionen in

$$H' = h_1 x_1 y_1 + h_2 x_2 y_2 + \cdots + h_k x_k y_k$$

und A'' in

$$H'' = h_{k+1} x_{k+1} y_{k+1} + \cdots + h_l x_l y_l$$

transformiren, also $A = A' + A''$ in

$$H = H' + H'' = h_1 x_1 y_1 + h_2 x_2 y_2 + \cdots + h_l x_l y_l.$$

Da äquivalente Formen die nämlichen einfachen Elementartheiler besitzen, so ergiebt sich daraus nach Satz II:

IV. *Die einfachen Elementartheiler einer zerlegbaren Form sind diejenigen ihrer einzelnen Theile zusammengenommen.*

Sind z. B. q_β n beliebige Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, für welche die m Ausdrücke $\sum\limits_\beta a_{\alpha\beta} q_\beta = h P_\alpha$ nicht sämmtlich verschwinden, ist h ihr grösster gemeinsamer Divisor und $\Sigma P_\alpha p_\alpha = 1$, so ist der grösste gemeinsame Divisor h' der n Zahlen $\sum\limits_\alpha a_{\alpha\beta} p_\alpha = h' Q_\beta$ entweder gleich h oder ein Divisor von h (§. 3). Ist $h' = h$, so ist A einer zerlegbaren Form $C = h x_1 y_1 + G$ äquivalent, wo G die Variabeln x_1, y_1 nicht enthält. Die einfachen Elementartheiler von C sind daher die von G und die Potenzen verschiedener Primzahlen, welche in h aufgehen. Daraus folgt:

V. *Ist* $h = \sum\limits_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta$ *ein gemeinsamer Divisor der Zahlen* $\sum\limits_\beta a_{\alpha\beta} q_\beta$ *und* $\sum\limits_\alpha a_{\alpha\beta} p_\alpha$, *so sind die Potenzen verschiedener Primzahlen, deren Product* h *ist, einfache Elementartheiler des Systems* $a_{\alpha\beta}$.

Genügt also h dieser Bedingung nicht, so muss nothwendig $h' < h$ sein.

Sei, um für den Satz II. ein Beispiel zu geben, $\varphi(m)$ eine aus der Zahl m nach irgend einer Regel berechnete ganze Zahl, und, wenn d alle Divisoren von m durchläuft,

$$\Sigma \varphi(d) = f(m).$$

Seien a_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ n verschiedene ganze Zahlen, unter denen alle Divisoren von m sind, falls m unter ihnen ist. Ist $p_{\alpha\beta} = 1$, wenn a_α in a_β aufgeht, sonst aber 0, so ist $p_{\alpha\alpha} = 1$, und falls $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ist, $p_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha > \beta$. Daher ist die Determinante $n$ten Grades $|p_{\alpha\beta}| = 1$, auch dann, wenn die Zahlen a_λ nicht der Grösse nach geordnet sind. Geht nun die quadratische Form $\Sigma \varphi(a_\lambda) y_\lambda^2$ durch die unimodulare Substitution

$y_\lambda = \sum\limits_\gamma p_{\lambda\gamma} x_\gamma$ in $\Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ über, so ist $b_{\alpha\beta} = \sum\limits_\lambda \varphi(a_\lambda) p_{\lambda\alpha} p_{\lambda\beta}$. Das Product $p_{\lambda\alpha}\, p_{\lambda\beta}$ ist nur dann von Null verschieden und gleich 1, wenn a_λ sowohl in a_α als auch in a_β, also auch in den grössten gemeinsamen Divisor $a_{\alpha\beta}$ der Zahlen a_α und a_β aufgeht. Daher ist $b_{\alpha\beta} = \Sigma\varphi(d)$, wo d alle Divisoren von $a_{\alpha\beta}$ durchläuft, oder $b_{\alpha\beta} = f(a_{\alpha\beta})$. Die quadratische Form $\Sigma f(a_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta$ ist also der Form $\Sigma\varphi(a_\lambda) y_\lambda^2$ äquivalent (*Smith, Proceedings of the London mathematical society, vol. VII, p.* 208). Ist $a_\lambda = \lambda$ und $\varphi(m)$ die Anzahl der Zahlen eines vollständigen Restsystems (mod. m), die relativ prim zu m sind, so ist $f(m) = m$. Ist also $a_{\alpha\beta}$ der grösste gemeinsame Divisor von α und β, so sind $\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(n)$ n zusammengesetzte Elementartheiler des Systems $a_{\alpha\beta}$ und die quadratische Form $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ ist der Form $\Sigma\varphi(\lambda) y_\lambda^2$ äquivalent*).

§. 7. Alternirende bilineare Formen.

Ist $A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ eine bilineare Form der Variabeln $x_1, \ldots x_m$; $y_1, \ldots y_n$, so stellt die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & \frac{\partial A}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial y_k} \\ \frac{\partial A}{\partial x_1} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial A}{\partial x_k} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

eine von $x_1, y_1, \ldots x_k, y_k$ unabhängige bilineare Form dar. Diese Bemerkung will ich benutzen, um für den Fall, dass A eine alternirende Form, also $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, $a_{\alpha\alpha} = 0$, $m = n$ ist, die Normalform F (§. 5) durch eine andere zu ersetzen.

---

*) Ist $a_{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa}$ der grösste gemeinsame Divisor der k ($\leqq n$) Zahlen $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma, \ldots a_\varkappa$, so ist ebenso die Form $k$ten Grades $\Sigma f(a_{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa}) x_\alpha x_\beta x_\gamma \ldots x_\varkappa$ der Form $\Sigma\varphi(a_\lambda) y_\lambda^k$ äquivalent. Wenn man daher in einer algebraischen Invariante der ersteren Form diejenigen Coefficienten $f(a_{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa})$, deren Indices nicht alle einander gleich sind, durch Null, und diejenigen, deren Indices alle gleich λ sind, durch $\varphi(a_\lambda)$ ersetzt, so bleibt sie ungeändert.

Sei f_1 der grösste gemeinsame Divisor der Coefficienten von A, und seien $x_\alpha = p_{1\alpha}$, $y_\beta = p_{2\beta}$ Werthe, für welche

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, p_{1\alpha}\, p_{2\beta} = f_1$$

wird. Schreibt man diese Gleichung in der Gestalt

$$\Sigma \frac{a_{\alpha\beta}}{f_1}(p_{1\alpha}\, p_{2\beta} - p_{1\beta}\, p_{2\alpha}) = 1, \quad (\alpha > \beta)$$

so sieht man, dass die Determinanten $p_{1\alpha}\, p_{2\beta} - p_{1\beta}\, p_{2\alpha}$ nicht sämmtlich einen Divisor gemeinsam haben. Daher kann man (vgl. §. 8, VI.) $n(n-2)$ Zahlen $p_{3\alpha}, \dots p_{n\alpha}$ so bestimmen, dass die Determinante $n$ten Grades $|p_{\alpha\beta}| = 1$ wird. Dann ist

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta}\,(p_{1\alpha}\, x_1 + \cdots + p_{n\alpha}\, x_n)(p_{1\beta}\, y_1 + \cdots + p_{n\beta}\, y_n) = f_1\, \Sigma\, h_{\gamma\delta}\, x_\gamma\, y_\delta = f_1\, H$$

eine der Form A äquivalente Form, die alternirend ist, weil sie durch cogrediente Substitutionen aus A hervorgeht, und in der $h_{12} = -h_{21} = 1$ ist.

Setzt man nun

$$A_1 = \begin{vmatrix} H & \frac{\partial H}{\partial y_1} & \frac{\partial H}{\partial y_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & h_{11} & h_{12} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} & h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H & \frac{\partial H}{\partial y_1} & \frac{\partial H}{\partial y_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & 0 & 1 \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

so ist

$$H = \frac{\partial H}{\partial y_2}\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial H}{\partial x_2} + A_1,$$

und A_1 nach dem oben erwähnten Satze von x_1, y_1, x_2, y_2 unabhängig. Ersetzt man in der Form H

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y_2} &= x_1 \phantom{{}+x_2} + h_{32}\, x_3 + \cdots + h_{n2}\, x_n \text{ durch } x_1, \\
-\frac{\partial H}{\partial y_1} &= \phantom{x_1+{}} x_2 + h_{13}\, x_3 + \cdots + h_{1n}\, x_n \text{ durch } x_2, \\
-\frac{\partial H}{\partial x_2} &= y_1 \phantom{{}+y_2} + h_{32}\, y_3 + \cdots + h_{n2}\, y_n \text{ durch } y_1, \\
\frac{\partial H}{\partial x_1} &= \phantom{y_1+{}} y_2 + h_{13}\, y_3 + \cdots + h_{1n}\, y_n \text{ durch } y_2,
\end{aligned}$$

und lässt $x_3, y_3, \dots x_n, y_n$ ungeändert (was cogrediente unimodulare Substitutionen sind), so geht H in $x_1 y_2 - x_2 y_1 + A_1$ über. Folglich lässt sich A durch cogrediente Substitutionen in

$$f_1\,(x_1\, y_2 - x_2\, y_1) + f_1\, A_1$$

transformiren*), wo die Form A_1 alternirend ist und die Variabeln x_1, y_1, x_2, y_2 nicht enthält. Ist dieselbe nicht Null, und ist f_2 der grösste gemeinsame Divisor ihrer Coefficienten, so kann sie auf die nämliche Weise in

$$f_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + f_2 A_2$$

transformirt werden, wo A_2 die Variabeln $x_1, y_1, \ldots x_4, y_4$ nicht enthält. Setzt man dies Verfahren so lange fort, bis man zu einer verschwindenden Form gelangt, so hat man A durch cograediente unimodulare Substitutionen in

$$(1.)\quad \begin{aligned} G &= f_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) + f_1 f_2 (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_l (x_{2l-1} y_{2l} - x_{2l} y_{2l-1}) \\ &= e_2(x_1 y_2 - x_2 y_1) + e_4(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + e_{2l}(x_{2l-1} y_{2l} - x_{2l} y_{2l-1}) \end{aligned}$$

transformirt. Der Rang von G ist $2l$. Ist d_λ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades von G, so findet man entweder wie in §. 5, oder auch mit Hülfe des Satzes IV, §. 6

$$(2.)\quad d_{2\lambda} = (e_2 e_4 \cdots e_{2\lambda})^2 = (f_1^\lambda f_2^{\lambda-1} \cdots f_\lambda)^2$$

$$(3.)\quad d_{2\lambda} = e_{2\lambda}\, d_{2\lambda-1}, \quad d_{2\lambda-1} = e_{2\lambda}\, d_{2\lambda-2}.$$

Mithin ist

$$(4.)\quad d_{2\lambda}\, d_{2\lambda-2} = d_{2\lambda-1}^2,$$

oder wenn man $\dfrac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = e_\lambda$ setzt,

$$(5.)\quad e_{2\lambda} = e_{2\lambda-1}.$$

Da die der Form G äquivalente Form A denselben Rang und dieselben Elementartheiler besitzt, so ergeben sich folglich die Sätze:

I. *In einer schiefen Determinante ist der 2λte Elementartheiler dem $(2\lambda-1)$ten gleich, also der Rang stets eine gerade Zahl.*

II. *In einer schiefen Determinante ist der grösste gemeinsame Divisor der Unterdeterminanten desselben paaren Grades ein Quadrat.*

---

*) Man kann die beiden obigen Transformationen in eine zusammenziehen, indem man nach §. 2 die Zahlen $p_{3\alpha}, \ldots p_{n\alpha}$ so bestimmt, dass $\sum\limits_\beta \dfrac{a_{\alpha\beta}}{f_1} p_{2\beta}$ der Coefficient von $p_{1\alpha}$ und $\sum\limits_\alpha \dfrac{a_{\alpha\beta}}{f_1} p_{1\alpha}$ der Coefficient von $p_{2\beta}$ in der Determinante $n$ten Grades $|p_{\alpha\beta}| = 1$ wird.

III. *Sind zwei alternirende Formen äquivalent, so können sie durch cogrediente Substitutionen in einander transformirt werden.*

Die Einfachheit des letzten Satzes scheint um so bemerkenswerther, je complicirter die Bedingungen sind, unter denen zwei symmetrische bilineare Formen durch cogrediente Substitutionen in einander transformirt werden können.

§. 8. Lineare Gleichungen.

Das in den §§. 5 und 6 gewonnene Ergebniss lässt sich auch folgendermassen ausdrücken: Seien

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

m Linearformen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, und seien A'_α m lineare Verbindungen derselben, durch welche sich auch umgekehrt die Formen A_α (ganzzahlig) ausdrücken lassen

$$A_\alpha = b_{\alpha 1} A'_1 + b_{\alpha 2} A'_2 + \cdots + b_{\alpha m} A'_m.$$

Anstatt der gegebenen Variabeln mögen ferner durch eine unimodulare Substitution

$$x'_\beta = c_{\beta 1} x_1 + c_{\beta 2} x_2 + \cdots + c_{\beta n} x_n \quad (\beta = 1, 2, \ldots n)$$

n neue Variabeln eingeführt werden. Ist nun l der Rang des Systems A der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ und bilden die l Zahlen h_λ irgend ein System zusammengesetzter Elementartheiler von A, so kann man jene beiden Umformungen so wählen, dass

$$A'_\lambda = h_\lambda x'_\lambda, \quad A'_{l+\mu} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots l)$$

wird. Man kann sie z. B. so einrichten, dass h_λ der λte Elementartheiler von A wird, also h_λ durch $h_{\lambda-1}$ theilbar. In dem Coefficientensystem der l Linearformen

$$x'_\lambda = c_{\lambda 1} x_1 + c_{\lambda 2} x_2 + \cdots + c_{\lambda n} x_n \quad (\lambda = 1, 2, \ldots l)$$

haben die Determinanten $l$ten Grades keinen Divisor gemeinsam, weil die Determinante $n$ten Grades $|c_{\alpha\beta}| = \pm 1$ eine homogene lineare Function jener Determinanten ist. Ebenso haben in den Gleichungen

$$A_\alpha = b_{\alpha 1} A'_1 + b_{\alpha 2} A'_2 + \cdots + b_{\alpha l} A'_l$$

die Determinanten $l$ten Grades der Coefficienten keinen Divisor gemeinsam. Es ergeben sich also die Sätze:

I. *Ist l der Rang des Systems der m Linearformen*

$$A_\alpha = a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + \cdots + a_{\alpha n}x_n,$$

und sind h_λ irgend l zusammengesetzte Elementartheiler derselben,

1) *so können die Formen durch unimodulare Substitutionen in*

$$A_\alpha = b_{\alpha 1}h_1 x'_1 + b_{\alpha 2}h_2 x'_2 + \cdots + b_{\alpha l}h_l x'_l$$

transformirt werden, wo die Determinanten $l$ten Grades des Coefficientensystems $b_{\alpha\lambda}$ keinen Divisor gemeinsam haben;

2) *so giebt es l lineare Verbindungen dieser Formen*

$$A'_\lambda = h_\lambda(c_{\lambda 1}x_1 + c_{\lambda 2}x_2 + \cdots + c_{\lambda n}x_n),$$

in denen die Determinanten $l$ten Grades der Coefficienten $c_{\lambda\beta}$ keinen Divisor gemeinsam haben, und aus denen sich auch umgekehrt die m Formen A_α linear zusammensetzen lassen.

Diese Sätze bilden die Grundlage für die Theorie der (ganzzahligen) linearen Gleichungen.

Sei zunächst $m > n = l$. Angenommen, die Werthe der m Formen A_α sind ganze Zahlen, während die Variabeln gebrochene Werthe haben $x_\beta = \frac{a_\beta}{a}$, wo $a, a_1, \dots a_n$ keinen Theiler gemeinsam haben. Dann sind auch die Werthe der n Formen $A'_\beta = h_\beta x'_\beta$ $(\beta = 1, 2, \dots n)$ ganze Zahlen, während $x'_\beta = \frac{a'_\beta}{a}$ ist, wo $a, a'_1, \dots a'_n$ keinen Theiler gemeinsam haben. Da (§. 6) der $n$te Elementartheiler e_n von A das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der n Zahlen h_β ist, so sind folglich auch die n Zahlen $e_n \frac{a'_\beta}{a}$ ganz, und daher ist a ein Divisor von e_n. Ist $h_\lambda = e_\lambda$, so sind die Werthe der Formen A'_β ganze Zahlen, wenn man $x'_n = \frac{1}{e_n}$ und sonst $x'_\beta = 0$ setzt. Es giebt also wirklich Brüche mit dem Generalnenner e_n, für welche die Formen A_α ganzzahlige Werthe annehmen. Da, falls $l < n$ ist, $e_n = 0$ ist, so gilt allgemein der Satz:

II. *Werden mehrere homogene lineare Functionen von n Variabeln ganzen Zahlen gleich, wenn man für die Variabeln Brüche setzt, so ist der $n$te Elementartheiler ihres Coefficientensystems durch den Generalnenner dieser Brüche theilbar.*

Sei zweitens $n > m = l$, seien also

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

m unabhängige lineare Gleichungen. Dieselben kann man durch m unabhängige lineare Verbindungen ersetzen, also auf die Form

$$h_\alpha (c_{\alpha 1} x_1 + c_{\alpha 2} x_2 + \cdots + c_{\alpha n} x_n) = 0$$

oder

$$C_\alpha = c_{\alpha 1} x_1 + c_{\alpha 2} x_2 + \cdots + c_{\alpha n} x_n = 0$$

bringen; wo die Determinanten $m$ten Grades der Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ keinen Divisor gemeinsam haben. Diese Gleichungen haben $n-m$ unabhängige Lösungen

$$x_1 = b_{1\beta}, \quad x_2 = b_{2\beta}, \ldots \quad x_n = b_{n\beta}, \quad (\beta = 1, 2, \ldots n-m)$$

die man als ganze Zahlen voraussetzen kann. Die allgemeinste rationale Lösung ist dann

$$(1.) \qquad x_1 = \Sigma b_{1\beta} z_\beta, \quad x_2 = \Sigma b_{2\beta} z_\beta, \ldots x_n = \Sigma b_{n\beta} z_\beta,$$

wo die Grössen z_β beliebige rationale Zahlen sind. Die $n-m$ linearen Gleichungen

$$B_\beta = b_{1\beta} x_1 + b_{2\beta} x_2 + \cdots + b_{n\beta} x_n = 0$$

habe ich (d. J. Bd. 82, S. 236) den m Gleichungen $A_\alpha = 0$ *adjungirt* genannt. In zwei adjungirten Gleichungssystemen bilden die Coefficienten des einen ein vollständiges System unabhängiger Lösungen des andern. Ohne diese Beziehung zu ändern, kann man die Gleichungen $B_\beta = 0$ durch $n-m$ beliebige unabhängige lineare Verbindungen

$$D_\beta = d_{1\beta} x_1 + d_{2\beta} x_2 + \cdots + d_{n\beta} x_n = 0$$

ersetzen, z. B. durch solche, dass die Determinanten $(n-m)$ten Grades der Coefficienten $d_{\alpha\beta}$ keinen Divisor gemeinsam haben. Alle rationalen Lösungen der gegebenen Gleichungen werden dann auch durch die Formeln

$$(2.) \qquad x_1 = \Sigma d_{1\beta} z_\beta, \quad x_2 = \Sigma d_{2\beta} z_\beta, \ldots x_n = \Sigma d_{n\beta} z_\beta$$

dargestellt. Sind die Grössen z_β ganze Zahlen, so sind auch die Lösungen (1.) oder (2.) ganze Zahlen. Stellen die Formeln (1.) auch ganzzahlige Lösungen dar, wenn man den Grössen z_β gebrochene Werthe ertheilt, so ist der Generalnenner dieser Brüche ein Divisor des $(n-m)$ten Elementartheilers des Coefficientensystems $b_{\alpha\beta}$. Da der $(n-m)$te Elementar-

theiler des Coefficientensystems $d_{\alpha\beta}$ gleich eins ist, so müssen die Formeln (2.) sämmtliche ganzzahligen Lösungen für ganzzahlige Werthe der Grössen z_β darstellen. Mehrere ganzzahlige Lösungen bilden ein *Fundamentalsystem,* wenn man jede ganzzahlige Lösung aus ihnen zusammensetzen kann, indem man sie mit ganzen Zahlen multiplicirt und addirt. Demnach ergiebt sich der Satz:

III. *Damit mehrere Lösungen von m unabhängigen homogenen linearen Gleichungen zwischen n Unbekannten ein Fundamentalsystem bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten $(n-m)$ten Grades, die sich aus ihnen bilden lassen, keinen Divisor gemeinsam haben.*

Dabei kann die Anzahl der Lösungen gleich $n-m$ oder auch grösser als $n-m$ sein.

Endlich will ich ein Bild von der Gesammtheit der Werthe entwerfen, welche m lineare Formen für ganzzahlige Werthe der Variabeln annehmen können, also die Bedingungen suchen, unter denen die m nicht homogenen linearen Gleichungen

$$(3.)\qquad a_{\alpha 0}+a_{\alpha 1}x_1+a_{\alpha 2}x_2+\cdots+a_{\alpha n}x_n=0$$

durch ganzzahlige Werthe der Unbekannten befriedigt werden. Sei A das System der Coefficienten $a_{\alpha 1}, \dots a_{\alpha n}$ und C das der Coefficienten $a_{\alpha 0}$, $a_{\alpha 1}, \dots a_{\alpha n}$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$. Ich nehme irgend μ der m Gleichungen (3.) und bilde aus ihren Coefficienten alle Determinanten μten Grades. Eine solche Determinante kann dann, wenn sie dem System C und nicht dem System A angehört, wenn sie also Elemente $a_{\alpha 0}$ enthält, vermöge der Gleichungen (3.) als eine lineare Verbindung von Determinanten von A dargestellt werden. In den betrachteten μ Gleichungen ist also der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten μten Grades von C ebenso gross (d. h. nicht kleiner) wie derjenige der Determinanten μten Grades von A. Daher ist auch der grösste gemeinsame Divisor aller Determinanten μten Grades von C gleich dem aller Determinanten μten Grades von A, und der Rang von C gleich dem Range l von A. Diese Bedingungen sind aber nicht von einander unabhängig, sondern es gilt der Satz: (Für den Fall $l=m$ vgl. *Sm.* p. 310.)

IV. *Damit mehrere nicht homogene lineare Gleichungen durch ganzzahlige Werthe der Unbekannten befriedigt werden können, ist nothwendig*

und hinreichend, dass der Rang l und der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $l$ten Grades des Systems der Coefficienten der Unbekannten nicht geändert wird, wenn zu diesem System noch die constanten Glieder der Gleichungen hinzugefügt werden.

Indem man die gegebenen Gleichungen durch lineare Verbindungen ersetzt und die Variabeln durch eine unimodulare Substitution transformirt, kann man sie auf die Gestalt

$$(4.)\qquad a_1 + h_1 x'_1 = 0, \ldots\; a_l + h_l x'_l = 0,\quad a_{l+1} = 0, \ldots\; a_m = 0$$

bringen, wo die Zahlen a_α lineare Verbindungen der Zahlen $a_{\alpha 0}$ sind. Bei dieser Umformung bleibt (§. 1) der Rang von A und von C, und der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades von A und von C ungeändert. Da nun der Rang von C gleich l vorausgesetzt ist, so müssen auch in dem transformirten System die Determinanten $(l+1)$ten Grades

$$h_1 h_2 \ldots h_l a_{l+1}, \ldots\; h_1 h_2 \ldots h_l a_m$$

verschwinden, also, weil $h_1 h_2 \ldots h_l = d_l$ von Null verschieden ist, $a_{l+1}, \ldots a_m$ gleich Null sein. Demnach enthalten die Gleichungen (4.) keinen Widerspruch, und ihre Auflösung ist in rationalen Zahlen möglich. Die von Null verschiedenen Determinanten $l$ten Grades des transformirten Systems C sind

$$h_1 h_2 h_3 \ldots h_l,\; a_1 h_2 h_3 \ldots h_l,\; h_1 a_2 h_3 \ldots h_l, \ldots h_1 h_2 \ldots h_{l-1} a_l.$$

Da nach der Annahme ihr grösster gemeinsamer Divisor gleich $h_1 h_2 \ldots h_l$ sein soll, so muss a_1 durch h_1, a_2 durch $h_2, \ldots\; a_l$ durch h_l theilbar sein. Folglich werden die Gleichungen (4.), also auch die Gleichungen (3.) durch ganzzahlige Werthe der Unbekannten befriedigt. Ist $d_l = 1$, so ergiebt sich die Folgerung:

V. *Mehrere homogene lineare Functionen können, wenn in ihrem Coefficientensystem diejenigen Determinanten keinen Divisor gemeinsam haben, deren Grad gleich dem Range des Systems ist, alle ganzzahligen Werthe, welche den zwischen ihnen bestehenden linearen Relationen genügen, für ganzzahlige Werthe der Variabeln annehmen.*

Ich will den Satz IV. noch auf einem andern Wege beweisen, mich aber dabei auf den Fall beschränken, dass die m Formen A_α unabhängig

sind, also $l=m\leqq n$ ist. Geht die Form $A=\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$ durch die unimodularen Substitutionen

$$x'_\gamma=\sum_\alpha b_{\alpha\gamma}\, x_\alpha,\quad y'_\gamma=\sum_\beta c_{\gamma\beta}\, y_\beta$$

in $H=\Sigma\, h_\gamma\, x'_\gamma\, y'_\gamma$ über, so ist $a_{\alpha\beta}=\sum_\gamma b_{\alpha\gamma}\, h_\gamma\, c_{\gamma\beta}$, also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\\ c_{m+1,1} & \cdots & c_{m+1,n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11}h_1 & \cdots & b_{1m}h_m & 0\cdots 0\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots\cdots\\ b_{m1}h_1 & \cdots & b_{mm}h_m & 0\cdots 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\cdots 0\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots\cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}=h_1 h_2\cdots h_m=d_m.$$

II. *Sind m Zeilen von je $n\,(>m)$ ganzen Zahlen gegeben, so kann man zu ihnen $n-m$ Zeilen von je n ganzen Zahlen so hinzufügen, dass die Determinante $n$ten Grades des ganzen Zahlensystems gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten $m$ten Grades des gegebenen Systems wird.*

Sei nun in den Gleichungen (3.) der Rang von A, also auch der von C, gleich m und der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $m$ten Grades von A sowohl, wie von C, gleich d. Zu den m Zeilen von je n Elementen

$$a_{\alpha 1},\ a_{\alpha 2},\ \cdots\ a_{\alpha n}\quad (\alpha=1,2,\ldots m)$$

füge man $n-m$ Zeilen von je n Elementen

$$a_{\beta 1},\ a_{\beta 2},\ \cdots\ a_{\beta n}\quad (\beta=m+1,\ldots n)$$

so hinzu, dass die Determinante $n$ten Grades $|a_{\alpha\beta}|=d$ wird. Dann bestimme man die Unbekannten x_β aus den m Gleichungen (3.) verbunden mit den $n-m$ Gleichungen

$$a_{\beta 0}+a_{\beta 1}\,x_1+a_{\beta 2}\,x_2+\cdots+a_{\beta n}\,x_n=0\quad (\beta=m+1,\ldots n),$$

wo $a_{\beta 0}$ willkürliche Zahlen sind. So findet man

$$d\,x_\beta=-\,|a_{\gamma 1},\ \cdots\ a_{\gamma,\beta-1},\ a_{\gamma 0},\ a_{\gamma,\beta+1},\ \cdots\ a_{\gamma n}|.$$

Diese Determinante ist aber eine homogene lineare Verbindung von Determinanten $m$ten Grades des Systems C, also durch d theilbar. Mithin ist x_β eine ganze Zahl. Dies ist zugleich die allgemeinste Lösung der Gleichungen (3.) mit den $n-m$ willkürlichen Constanten $a_{m+1,0},\ \ldots\ a_{n0}$, und falls $a_{10}=\cdots=a_{m0}=0$ ist, die allgemeinste ganzzahlige Lösung der homogenen Gleichungen $A_\alpha=0$.

§. 9. Moduln.

Wenn in einem System von m unabhängigen Linearformen

$$K_\alpha = k_{\alpha 1}\, y_1 + k_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + k_{\alpha p}\, y_p \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

der grösste gemeinsame Divisor r der Determinanten $m$ten Grades grösser als 1 ist, so können dieselben nicht alle ganzen Zahlen für ganzzahlige Werthe der Variabeln darstellen. Die Gesammtheit der Werthsysteme, welche durch diese Formen dargestellt werden können, heisst ein Modul*) und wird mit demselben Buchstaben K bezeichnet werden, wie das System der Coefficienten $k_{\alpha\beta}$. Die Zahl m heisst der Rang des Moduls K. Jedes System von m Zahlen, welches durch die Formen K_α dargestellt werden kann, heisst congruent 0 (mod. K). Zwei Zahlensysteme a_α, b_α heissen *congruent* (mod. K), in Zeichen $a_\alpha \equiv b_\alpha$ (mod. K), wenn $a_\alpha - b_\alpha \equiv 0$ (mod. K) ist, wenn also die ganzen Zahlen y_β so bestimmt werden können, dass

$$a_\alpha = b_\alpha + k_{\alpha 1}\, y_1 + k_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + k_{\alpha p}\, y_p$$

ist. Wenn dies nicht möglich ist, so heissen die beiden Zahlensysteme *incongruent* (mod. K). Der Modul K bleibt ungeändert, wenn die Variabeln y_β durch eine unimodulare Substitution transformirt werden. Dadurch kann man stets erreichen, dass die Anzahl p der Variabeln y_β gleich dem Range m des Moduls K wird. Ist $K_\alpha = k y_\alpha$, so bezeichne ich den Modul K einfach mit k, nenne also zwei Zahlensysteme a_α, b_α congruent (mod. k), wenn $a_\alpha \equiv b_\alpha$ (mod. k) ist.

Sei die Determinante $m$ten Grades $|p_{\alpha\beta}| = \pm 1$ und sei K' der von den m Linearformen

$$K'_\alpha = p_{\alpha 1}\, K_1 + p_{\alpha 2}\, K_2 + \cdots + p_{\alpha m}\, K_m$$

gebildete Modul. Lässt man jedem Systeme von m ganzen Zahlen x_α durch die Gleichungen

$$(1.) \qquad x'_\alpha = p_{\alpha 1}\, x_1 + p_{\alpha 2}\, x_2 + \cdots + p_{\alpha m}\, x_m$$

ein System von m ganzen Zahlen x'_α entsprechen, und entsprechen den

*) *Dedekind, Sur la théorie des nombres entiers algébriques, Paris* 1877. §. 1. Ich werde diese Schrift im folgenden mit *Dk.* citiren.

Zahlensystemen a_α, b_α die Systeme a'_α, b'_α, so entspricht dem Systeme $a_\alpha - b_\alpha$ das System $a'_\alpha - b'_\alpha$. Ist $a_\alpha \equiv b_\alpha$ (mod. K), so ist $a'_\alpha \equiv b'_\alpha$ (mod. K') und umgekehrt; folglich müssen auch, wenn a_α und b_α (mod. K) incongruent sind, a'_α und b'_α (mod. K') incongruent sein. Die Anzahl der (mod. K) incongruenten Zahlensysteme ist daher der Anzahl der (mod. K') incongruenten gleich. Nun kann man durch passende Wahl der Formen K'_α und ihrer Variabeln erreichen, dass $K'_\alpha = k_\alpha y'_\alpha$ wird, wo $k_1 k_2 \dots k_m = r$ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $m$ten Grades von K ist. Alle (mod. K') incongruenten Zahlensysteme erhält man aber, indem man x'_α ein vollständiges Restsystem mod. k_α durchlaufen lässt. Die Anzahl derselben ist also gleich $k_1 k_2 \dots k_m = r$.

I. *In Bezug auf einen Modul, der von m unabhängigen Linearformen gebildet wird, ist die Anzahl der incongruenten Zahlensysteme gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten m ten Grades, die sich aus den Coefficienten der Formen bilden lassen.*

Der $m$te Elementartheiler k von K ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $k_1, k_2, \dots k_m$. Entsprechen m beliebigen Zahlen x_α durch die Gleichungen (1.) die Zahlen x'_α, so entsprechen den Zahlen $k x_\alpha$ die Zahlen $k x'_\alpha$. Ist nun $K'_\alpha = k_\alpha y'_\alpha$, so ist $k x'_\alpha \equiv 0$ mod. K' und daher auch $k x_\alpha \equiv 0$ mod. K. Daraus folgt:

II. *Ist k der m te Elementartheiler des Moduls* K *vom Range m, so sind je zwei Zahlensysteme, welche (mod. k) congruent sind, auch (mod.* K*) congruent.*

Unter den unzählig vielen Zahlensystemen, welche die m linearen Formen

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \dots + a_{\alpha n} x_n$$

darstellen können, sind nur eine endliche Anzahl (mod. K) incongruent, weil es überhaupt nur r (mod. K) incongruente Zahlensysteme giebt. Diese Anzahl wird, wenn A das System der Coefficienten der Formen A_α ist, mit (A, K) bezeichnet. Ebenso wird die Anzahl der (mod. k) incongruenten Zahlensysteme, welche die Formen A_α darstellen können, mit (A, k) bezeichnet. (*Dk.* §. 2, p. 15.) Diese Zahl bleibt ungeändert, wenn für $x_1, \dots x_n$ durch unimodulare Substitutionen neue Variable eingeführt werden. Ist ferner D das System der Coefficienten der m Formen

$$D_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + k_{\alpha 1} x_{n+1} + \cdots + k_{\alpha p} x_{n+p},$$

so ist $(A,K) = (D,K)$. [*Dk.* §. 2 : $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$]. Denn für jedes Werthsystem der Variabeln stellen die Formen A_α und D_α zwei Zahlensysteme dar, welche (mod. K) congruent sind. Ist die Determinante $m$ten Grades $|p_{\alpha\beta}| = \pm 1$ und D' das System der Coefficienten der m Formen

$$D'_\alpha = p_{\alpha 1} D_1 + p_{\alpha 2} D_2 + \cdots + p_{\alpha m} D_m$$

und K' der von den m Formen

$$K'_\alpha = p_{\alpha 1} K_1 + p_{\alpha 2} K_2 + \cdots + p_{\alpha m} K_m$$

gebildete Modul, so ist $(A,K) = (A', K')$. Denn jedem durch die Formen D_α darstellbaren Zahlensysteme entspricht ein durch die Formen D'_α darstellbares und die Differenzen von zwei durch die Formen D_α darstellbaren Zahlensystemen können durch die Formen K_α dargestellt werden, oder nicht, je nachdem die Differenzen der entsprechenden Zahlensysteme durch die Formen K'_α darstellbar sind oder nicht. Nach §. 8, I. kann man aber die Substitutionscoefficienten $p_{\alpha\beta}$ so wählen, dass

$$D'_\alpha = h_\alpha (a'_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a'_{\alpha n} x_n + k'_{\alpha 1} x_{n+1} + \cdots + k'_{\alpha p} x_{n+p}) = h_\alpha D''_\alpha,$$

und folglich

$$K'_\alpha = h_\alpha (k'_{\alpha 1} y_1 + \cdots + k'_{\alpha p} y_p) = h_\alpha K''_\alpha$$

wird, wo $h_1 h_2 \ldots h_m = s$ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $m$ten Grades von D ist, und die Determinanten $m$ten Grades des Coefficientensystems der Formen D''_α keinen Divisor gemeinsam haben. Durch die Formen D''_α kann daher nach §. 8, V. jedes beliebige System von m Zahlen b_α dargestellt werden. Damit folglich die Zahlen c_α durch die Formen D'_α darstellbar seien, ist nothwendig und hinreichend, dass c_α durch h_α theilbar, also $c_\alpha = h_\alpha b_\alpha$ sei. Sind ferner a_α und b_α zwei ganz beliebige Zahlensysteme, also $h_\alpha a_\alpha$ und $h_\alpha b_\alpha$ irgend zwei durch die Formen D'_α darstellbare Zahlensysteme, so sind die Differenzen $h_\alpha (a_\alpha - b_\alpha)$ durch die Formen $K'_\alpha = h_\alpha K''_\alpha$ darstellbar oder nicht, je nachdem die Zahlen $a_\alpha - b_\alpha$ durch die Formen K''_α dargestellt werden können oder nicht. Folglich ist (D', K') gleich der Anzahl der (mod. K'') incongruenten Zahlensysteme, also nach Satz I. gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten $m$ten Grades des Coefficientensystems der Formen K''_α.

Dieser aber ist gleich dem grössten gemeinsamen Divisor r der Determinanten $m$ten Grades von K', dividirt durch $h_1 h_2 \dots h_m = s$. Mithin ist

$$(A, K) = (D, K) = (D', K') = \frac{r}{s}.$$

III. *Ist* K *das System der Coefficienten der* m *unabhängigen Linearformen*

$$K_\alpha = k_{\alpha 1} y_1 + k_{\alpha 2} y_2 + \dots + k_{\alpha p} y_p$$

und A *das System der Coefficienten der* m *Linearformen*

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \dots + a_{\alpha n} x_n,$$

so wird die Anzahl (A, K) *der (mod.* K*) incongruenten Zahlensysteme, welche die Formen* A_α *darstellen können, gefunden, indem man den grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten* m*ten Grades von* K *durch den grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten* m*ten Grades des Systems*

$$a_{\alpha 1}, \dots a_{\alpha n}, k_{\alpha 1}, \dots k_{\alpha p} \quad (\alpha = 1, 2, \dots m)$$

dividirt.

Zu einer andern Formulirung dieses Resultats gelangt man durch die folgende Betrachtung: Ist $f(u, u_1, \dots u_n)$ eine ganze Function mit ganzzahligen Coefficienten, welche in Bezug auf jede der Variabeln u_α linear ist, so ist der grösste gemeinsame Divisor t aller durch diese Function darstellbaren Zahlen gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der Coefficienten von f. Denn ist $f = u\, g(u_1, \dots u_n) + h(u_1, \dots u_n)$ für alle Werthe von u durch t theilbar, so erkennt man, indem man $u = 0$ und 1 setzt, dass g und h durch t theilbar sein müssen. Ist also die Behauptung für Functionen von n Variabeln richtig, so ist sie demnach auch für Functionen von $n+1$ Variabeln bewiesen.

Man denke sich nun, nöthigenfalls durch Hinzufügung von Gliedern mit verschwindenden Coefficienten, die Anzahl n der Variabeln x_β gleich m oder grösser als m gemacht. Sind die willkürlichen ganzen Zahlen $u_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, 2, \dots p;\ \beta = 1, 2, \dots n)$ die Elemente des Systems U, so sind $a_{\alpha\beta} + k_{\alpha 1} u_{1\beta} + k_{\alpha 2} u_{2\beta} + \dots + k_{\alpha p} u_{p\beta}$ die Elemente des Systems $A + KU$. Alle Determinanten $m$ten Grades dieses Systems sind ganze Functionen der Variabeln $u_{\alpha\beta}$, welche in Bezug auf jede derselben linear sind, und deren Coefficienten die sämmtlichen Determinanten $m$ten Grades von D sind. Nach Satz III. folgt daraus:

IV. *Ist U eine willkürliche Form, so wird (A, K) gefunden, indem man den grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten $m$ten Grades von K durch denjenigen aller Determinanten $m$ten Grades der sämmtlichen Formen $A + KU$ dividirt.*

Versteht man von nun an unter dem Zeichen (A, K) den Quotienten $\frac{r}{s}$ der grössten gemeinsamen Divisoren der Determinanten $m$ten Grades von K und D, so hat dasselbe auch für den Fall eine Bedeutung, wo die Coefficienten von A und K gebrochene Werthe haben (§. 5, Anm.). Ist G ein System von m^2 ganzen oder gebrochenen Zahlen $g_{\alpha\beta}$, dessen Determinante g von Null verschieden ist, und sind K', A', D' die Coefficientensysteme der linearen Formen

$$K'_\alpha = g_{\alpha 1} K_1 + g_{\alpha 2} K_2 + \cdots + g_{\alpha m} K_m,$$
$$A'_\alpha = g_{\alpha 1} A_1 + g_{\alpha 2} A_2 + \cdots + g_{\alpha m} A_m,$$
$$D'_\alpha = g_{\alpha 1} D_1 + g_{\alpha 2} D_2 + \cdots + g_{\alpha m} D_m,$$

ist also symbolisch

$$K' = GK, \quad A' = GA, \quad D' = GD,$$

so ist jede Determinante $m$ten Grades von K' oder D' gleich der analogen Determinante von K oder D, multiplicirt mit g. Folglich ist

$$(A', K') = \frac{gr}{gs} = \frac{r}{s} = (A, K).$$

V. *Ist die Determinante $m$ten Grades des Systems G, dessen Elemente ganze oder gebrochene Zahlen sind, von Null verschieden, so ist*

$$(A, K) = (GA, GK).$$

Ist in dem Modul K die Anzahl der Variabeln $p = m$, und ist $g_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $k_{\beta\alpha}$ in der Determinante r des Systems K, dividirt durch r, also $G = K^{-1}$, und setzt man

$$g_{\alpha 1} a_{1\beta} + g_{\alpha 2} a_{2\beta} + \cdots + g_{\alpha m} a_{m\beta} = a'_{\alpha\beta}, \tag{2.}$$

so besteht das System $D' = K^{-1} D$ aus den Elementen

$$\begin{array}{cccc cccc}
a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1.
\end{array}$$

Die Determinanten $m$ten Grades dieses Systems sind die Zahl 1 und die Determinanten aller Grade des Systems $A' = K^{-1} A$. Ist q der

Generalnenner dieser Brüche, so ist der grösste gemeinsame Divisor derselben, weil die Zahl 1 darunter ist, gleich $\frac{1}{q}$. Da die Determinante von K' gleich 1 ist, so ist folglich $(A', K') = q$. Es ergiebt sich also der Satz: (*Dk.* §. 4, 4°.)

VI. *Der Generalnenner der Determinanten aller Grade des Systems* $K^{-1}A$ *ist gleich* (A, K).

Ist r' der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $(m-1)$ten Grades und k der $m$te Elementartheiler von K, so ist $r = kr'$. Nimmt man jetzt für $g_{\alpha\beta}$ den Coefficienten von $k_{\beta\alpha}$ in r, dividirt durch r', setzt also $G = kK^{-1}$, so besteht das System D' unter Anwendung der Bezeichnung (2.) aus den Elementen

$$\begin{matrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & k & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & 0 & 0 & \cdots & k, \end{matrix}$$

die sämmtlich ganze Zahlen sind.

VII. *Ist* k *der* m*te Elementartheiler des Moduls* K *vom Range* m, *so ist* $(A, K) = (kK^{-1}A, k)$.

Wir können uns daher im folgenden auf die Betrachtung des Moduls k beschränken. Für diesen ergeben sich zunächst aus den obigen allgemeinen Ergebnissen die speciellen Sätze:

VIII. *Der Generalnenner der Determinanten aller Grade, die sich aus den Elementen* $\frac{a_{\alpha\beta}}{k}$ *bilden lassen, ist gleich* (A, k).

IX. *Ist* d_λ *der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten* λ*ten Grades von* A, *so ist* (A, k) *der Generalnenner der Brüche* $\frac{d_\lambda}{k^\lambda}$.

X. *Ist* l *der Rang von* A *oder grösser als derselbe, so wird* (A, k) *gefunden, indem man* k^l *durch den grössten gemeinsamen Divisor der Zahlen*

$$k^l,\ k^{l-1}d_1,\ \ k^{l-2}d_2, \cdots d_l$$

dividirt.

Sei $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = e_\lambda$ der λte Elementartheiler von A und sei a eine

Primzahl, welche in k und e_λ in den Graden $\varkappa$ und ε_λ enthalten ist. Da $\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_3 \leqq \cdots$ ist, so sei $\varepsilon_\nu < \varkappa \leqq \varepsilon_{\nu+1}$ (wo nöthigenfalls $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_{l+1} = \infty$ gesetzt werden mag). Dann ist a in d_λ in der Potenz $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\lambda = \delta_\lambda$ und in dem Nenner des reducirten Bruches $\frac{d_\lambda}{k^\lambda}$, falls $\varkappa\lambda > \delta_\lambda$ in der Potenz $(\varkappa - \varepsilon_1) + (\varkappa - \varepsilon_2) + \cdots + (\varkappa - \varepsilon_\lambda)$, sonst aber gar nicht enthalten. Der Exponent der Potenz von a, welche in den Generalnenner der Brüche $\frac{d_\lambda}{k^\lambda}$ aufgeht, ist daher die grösste der Zahlen

$$(\varkappa - \varepsilon_1),\ (\varkappa - \varepsilon_1) + (\varkappa - \varepsilon_2),\ (\varkappa - \varepsilon_1) + (\varkappa - \varepsilon_2) + (\varkappa - \varepsilon_3), \cdots,$$

oder falls diese Zahlen sämmtlich negativ sein sollten, gleich Null. Da aber $\varkappa - \varepsilon_1, \varkappa - \varepsilon_2, \cdots \varkappa - \varepsilon_\nu$ positiv, dagegen $\varkappa - \varepsilon_{\nu+1}, \varkappa - \varepsilon_{\nu+2}$ Null oder negativ sind, so ist $(\varkappa - \varepsilon_1) + (\varkappa - \varepsilon_2) + \cdots + (\varkappa - \varepsilon_\nu)$ die grösste jener Zahlen. Ist s_λ der grösste gemeinsame Divisor von k und e_λ, so ist a in $\frac{k}{s_\lambda}$ in der Potenz $\varkappa - \varepsilon_\lambda$ enthalten, falls $\lambda \leqq \nu$ ist, und gar nicht, falls $\lambda > \nu$ ist, mithin in dem Producte $\prod \left(\frac{k}{s_\lambda}\right)$ in der Potenz $(\varkappa - \varepsilon_1) + (\varkappa - \varepsilon_2) + \cdots + (\varkappa - \varepsilon_\nu)$. Folglich ist $(A, k) = \prod \left(\frac{k}{s_\lambda}\right)$ (vgl. *Sm.* p. 320). Bilden die l Zahlen h_λ irgend ein System zusammengesetzter Elementartheiler von A, und ist a in h_λ in der Potenz ϱ_λ enthalten, so sind die Zahlen ϱ_λ abgesehen von der Reihenfolge mit den Zahlen ε_λ identisch. Ist also p_λ der grösste gemeinsame Divisor von k und h_λ, so ist auch $(A, k) = \prod \left(\frac{k}{p_\lambda}\right)$.

XI. *Bilden die l Zahlen h_λ irgend ein System zusammengesetzter Elementartheiler der Form A vom Range l, und ist p_λ der grösste gemeinsame Divisor, q_λ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von k und h_λ, so ist*

$$(A, k) = \prod \left(\frac{k}{p_\lambda}\right) = \prod \left(\frac{q_\lambda}{h_\lambda}\right).$$

Ist z. B. $k = e_\mu$, so ist $s_\lambda = e_\lambda$, falls $\lambda < \mu$, und $s_\lambda = e_\mu$, falls $\lambda > \mu$, mithin $(A, k) = \frac{k^\mu}{e_1 e_2 \cdots e_\mu}$, also

$$(3.) \qquad (A, e_\mu) = \frac{e_\mu^\mu}{d_\mu} = \frac{e_\mu^{\mu-1}}{d_{\mu-1}}.$$

§. 10. Lineare Congruenzen.

Sei K der Modul, welcher von den m unabhängigen Linearformen

$$K_\alpha = k_{\alpha 1}\, y_1 + k_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + k_{\alpha p}\, y_p$$

gebildet wird. Der Einfachheit halber werde ich meistens voraussetzen, dass die Anzahl der Variabeln p derjenigen der Formen m gleich gemacht worden ist. Die Lösungen der m homogenen linearen Congruenzen

$$A_\alpha = a_{\alpha 1}\, x_1 + a_{\alpha 2}\, x_2 + \cdots + a_{\alpha n}\, x_n \equiv 0 \pmod{K}$$

sind die Werthe der Unbekannten x_β, welche den Gleichungen

$$D_\alpha = a_{\alpha 1}\, x_1 + \cdots + a_{\alpha n}\, x_n + k_{\alpha 1}\, y_1 + \cdots + k_{\alpha p}\, y_p = 0$$

Genüge leisten. Dieselben haben $n+p-m$, also wenn $p=m$ ist, n unabhängige (ganzzahlige) Lösungen

$$x_1 = b_{1\beta},\ \cdots\ x_n = b_{n\beta},\ y_1 = l_{1\beta},\ \cdots\ y_m = l_{m\beta},\quad (\beta = 1, 2, \ldots n)$$

welche so gewählt werden können, dass die Determinanten $n$ten Grades, die aus ihnen gebildet werden können, keinen Divisor gemeinsam haben. Die Formeln

$$x_1 = \Sigma\, b_{1\beta}\, z_\beta,\ \cdots\ x_n = \Sigma\, b_{n\beta}\, z_\beta,\ y_1 = \Sigma\, l_{1\beta}\, z_\beta,\ \cdots\ y_m = \Sigma\, l_{m\beta}\, z_\beta$$

stellen dann alle ganzzahligen Lösungen der Gleichungen $D_\alpha = 0$ dar, wenn man für die Variabeln z_β alle möglichen ganzen Zahlen setzt. Mithin sind

$$x_1 = \Sigma\, b_{1\beta}\, z_\beta,\ \cdots\ x_n = \Sigma\, b_{n\beta}\, z_\beta$$

alle Lösungen der Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$. Die Determinanten $m$ten Grades des Elementensystems

$$(D.)\quad a_{\alpha 1},\ \cdots\ a_{\alpha n},\ k_{\alpha 1},\ \cdots\ k_{\alpha m}\quad (\alpha = 1, \ldots m)$$

verhalten sich (d. J. Bd. 82, S. 237), wie die complementären Determinanten $n$ten Grades des Systems

$$(D'.)\quad b_{1\beta},\ \cdots\ b_{n\beta},\ l_{1\beta},\ \cdots\ l_{m\beta}\quad (\beta = 1, 2, \ldots n).$$

Die letzteren haben keinen Divisor gemeinsam. Ist also der grösste gemeinsame Divisor der ersteren gleich s, so ist jede Determinante $n$ten Grades von D' gleich der complementären Determinante $m$ten Grades von D, dividirt durch s. Ist daher r die Determinante $m$ten Grades des Systems K und q die Determinante $n$ten Grades $|b_{\alpha\beta}|$, so ist (vgl. *Dk.* §. 2 : $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{m})$)

$$q = \frac{r}{s} = (A, K).$$

Sind umgekehrt

$$x_1 = b_{1\beta}, \cdots x_n = b_{n\beta}$$

n (oder mehr) Lösungen der Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$, deren Determinante (oder für die der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $n$ten Grades) gleich (A, K) ist, und sind

$$y_1 = l_{1\beta}, \cdots y_m = l_{m\beta}$$

die Werthe der Variabeln y_α, welche mit jenen zusammen den Gleichungen $D_\alpha = 0$ genügen, so erkennt man auf die nämliche Weise, dass die Determinanten $n$ten Grades des Systems D' keinen Divisor gemeinsam haben. Daraus folgt:

I. *Ein System homogener linearer Congruenzen zwischen n Unbekannten besitzt n Lösungen, deren Determinante gleich der Anzahl der incongruenten Werthe ist, welche die linken Seiten der Congruenzen annehmen können.*

II. *Damit sich aus mehreren Lösungen eines Systems von homogenen linearen Congruenzen zwischen n Unbekannten alle Lösungen linear zusammensetzen lassen, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Anzahl gleich n oder grösser als n ist, und dass der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $n$ten Grades, die sich aus ihnen bilden lassen, gleich der Anzahl der incongruenten Werthe ist, welche die linken Seiten der Congruenzen annehmen können.*

Die Lösungen der m nicht homogenen linearen Congruenzen

$$(1.)\qquad a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \equiv 0 \pmod{K}$$

sind die Lösungen der Gleichungen

$$(2.)\qquad a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + k_{\alpha 1} y_1 + \cdots + k_{\alpha p} y_p = 0.$$

Ich bezeichne das Coefficientensystem der Congruenzen (1.) mit C, der Gleichungen (2.) mit F und behalte die Zeichen A und D in dem oben definirten Sinne bei. Die Systeme D und F haben denselben Rang m. Damit also die Gleichungen (2.) eine ganzzahlige Lösung besitzen, ist (§. 8, IV.) nothwendig und hinreichend, dass der grösste gemeinsame Divisor s der Determinanten $m$ten Grades von D demjenigen der Determinanten $m$ten Grades von F gleich ist. Dann ist $(A,K) = \frac{r}{s}$ und $(C,K) = \frac{r}{s}$, und mithin ist

$$(3.)\qquad (A, K) = (C, K)$$

die für die Lösbarkeit der Congruenzen (1.) erforderliche und genügende Bedingung (vgl. *Sm.* p. 320). Aus einer Lösung findet man alle andern, indem man zu ihr alle Lösungen der homogenen Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$ hinzufügt.

III. *Damit das System der nicht homogenen linearen Congruenzen*

$$a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \equiv 0 \pmod{K}$$

eine Lösung besitze, ist nothwendig und hinreichend, dass die Anzahl der (*mod.* K) *incongruenten Zahlensysteme, welche die Formen*

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n$$

darstellen können, ebenso gross ist, wie die Anzahl derer, welche durch die Formen

$$C_\alpha = a_{\alpha 0} x_0 + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n$$

darstellbar sind.

Diesen Satz kann man auch leicht beweisen, ohne die Theorie der linearen Gleichungen zu benutzen. Jedes durch die Formen A_α darstellbare Zahlensystem kann auch durch die Formen C_α dargestellt werden, indem man $x_0 = 0$ setzt. Daher ist $(A, K) \leqq (C, K)$. Haben nun die Congruenzen (1.) eine Lösung $x_\alpha = a_\alpha$, so ist

$$a_{\alpha 1}(x_1 - a_1 x_0) + \cdots + a_{\alpha n}(x_n - a_n x_0) \equiv a_{\alpha 0} x_0 + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n.$$

Jedes durch die Formen C_α darstellbare Zahlensystem ist also einem durch die Formen A_α darstellbaren congruent, und folglich ist $(A, K) = (C, K)$. Ist umgekehrt $(A, K) = (C, K)$, so muss jedes durch die Formen C_α darstellbare Zahlensystem einem durch die Formen A_α darstellbaren congruent sein. Denn sonst würde $(A, K) < (C, K)$ sein. Nun wird $C_\alpha = -a_{\alpha 0}$, wenn man $x_0 = -1$, $x_1 = \cdots = x_n = 0$ setzt. Folglich muss auch $A_\alpha \equiv -a_{\alpha 0}$ werden können.

Ist k der $m$te Elementartheiler von K, und $x_\alpha \equiv 0 \pmod{k}$, so ist auch

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \equiv 0 \pmod{k}$$

und mithin (§. 9, II) auch $A_\alpha \equiv 0 \pmod{K}$. Man könnte daher zwei Lösungen der Congruenzen (1.), welche (mod. k) congruent sind, nicht als verschieden zählen. Anstatt aber hierauf näher einzugehen, will ich zeigen,

wie man überhaupt die Congruenzen (1.), in denen auch $a_{\alpha 0} = 0$ sein kann, auf andere in Bezug auf den Modul k zurückführen kann. Ist r die Determinante von K $(p = m)$, ist r' der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $(m-1)$ten Grades von K, also $r = kr'$, und ist $g_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $k_{\beta\alpha}$ in r, dividirt durch r', so erhält man, indem man die Gleichungen (2.) der Reihe nach mit $g_{\alpha 1}, \cdots g_{\alpha m}$ multiplicirt und addirt

$$a'_{\alpha 0} + a'_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a'_{\alpha n} x_n + k y_\alpha = 0,$$

wo

$$a'_{\alpha\beta} = g_{\alpha 1} a_{1\beta} + \cdots + g_{\alpha m} a_{m\beta}$$

ist. Diese Gleichungen oder, was auf dasselbe herauskommt, die Congruenzen

$$a'_{\alpha 0} + a'_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a'_{\alpha n} x_n \equiv 0 \pmod{k}$$

werden, da die Determinante $|g_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, genau durch die nämlichen Werthe befriedigt, wie die Gleichungen (2.) oder die Congruenzen (1.). Wir können uns daher im folgenden auf die Betrachtung von Congruenzen (mod. k) beschränken.

Die Anzahl p der (mod. k) incongruenten Lösungen der homogenen linearen Congruenzen

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \equiv 0 \pmod{k}$$

bezeichne ich mit $|A, k|$. Lässt man jede der n Variabeln x_β ein vollständiges Restsystem (mod. k) durchlaufen, so erhält man k^n Werthsysteme, unter denen immer Gruppen von p einander congruent sind. Die Anzahl der (mod. k) incongruenten Werthsysteme, welche die Formen A_α darstellen können, ist folglich $(A, k) = \frac{k^n}{p}$, oder es ist

$$(4.) \qquad |A, k|\,(A, k) = k^n.$$

Die nicht homogenen Congruenzen

$$(5.) \qquad a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \equiv 0 \pmod{k}$$

haben $|A, k|$ oder 0 Lösungen, je nachdem $(A, k) = (C, k)$ oder $< (C, k)$ ist. Ist l der Rang von A, so ist der von C entweder l oder $l+1$. Sind d_λ und d'_λ die grössten gemeinsamen Divisoren der Determinanten λten Grades von A und C, so ist (A, k) gleich k^l, dividirt durch den grössten gemeinsamen Divisor der Zahlen k^l, $k^{l-1} d_1, \ldots d_l$, und (C, k) gleich k^{l+1}

dividirt durch den grössten gemeinsamen Divisor t der Zahlen k^{l+1}, $k^l d'_1, \cdots k d'_l$, d'_{l+1} (wo auch $d'_{l+1} = 0$ sein kann). Nehmen wir jetzt an, dass d_l relativ prim zu k ist, so ist $(A, k) = k^l$. Da das System A einen Theil des Systems C bildet, so ist d'_λ ein Divisor von d_λ, also d'_l relativ prim zu k, und mithin ist t der grösste gemeinsame Divisor von k und d'_{l+1}. Damit nun $(A, k) = (C, k)$, also $k^l = \frac{k^{l+1}}{t}$, $t = k$ sei, ist erforderlich und genügend, dass d'_{l+1} durch k theilbar ist. Da d'_{l+1} durch d_l theilbar, und d_l relativ prim zu k ist, so ist dann schon $\frac{d'_{l+1}}{d_l}$ durch k theilbar. Der Gleichung (4.) zufolge ist für diesen Fall $|A, k| = k^{n-l}$.

IV. *Ist l der Rang des Systems der Coefficienten der Unbekannten in den nicht homogenen linearen Congruenzen*

$$a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \equiv 0 \pmod{k},$$

haben die Determinanten $l$ten Grades dieses Systems mit k keinen Divisor gemeinsam und sind die Determinanten $(l+1)$ten Grades des Systems aller Coefficienten durch k theilbar, so haben die Congruenzen k^{n-l} incongruente Lösungen.

Obwohl zur Lösung der Congruenzen (5.) die Entwicklungen des §. 3 vollständig ausreichen würden, so scheint es mir doch angemessener, dazu eine analoge Untersuchung zu benutzen, in welcher der Begriff der Gleichheit durchgängig dureh den der Congruenz ersetzt ist (§. 11). Hier will ich nur noch die folgende Bemerkung hinzufügen: Ist l der Rang von A, und bilden die l Zahlen h_λ ein System zusammengesetzter Elementartheiler von A, so kann man die Congruenzen (5.) auf die Congruenzen

$$(6.) \quad a_1 + h_1 x'_1 \equiv 0, \cdots \; a_l + h_l x'_l \equiv 0, \; a_{l+1} \equiv 0, \cdots \; a_m \equiv 0 \pmod{k}$$

zurückführen, wie in §. 8 die Gleichungen (3.) in die Gleichungen (4.) transformirt worden sind. Ist der Rang von C auch gleich l, so ist $a_{l+\mu} = 0$. Ist er nicht gleich l, so ist er gleich $l+1$. Der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $l$ten Grades von A ist $d = h_1 h_2 \cdots h_l$, der grösste gemeinsame Divisor d' der Determinanten $(l+1)$ten Grades von C ist

derjenige der Zahlen $h_1\, h_2 \cdots h_l\, a_{l+\mu}$ $(\mu = 1, 2, \cdots m-l)$. Mithin ist $\frac{d'}{d}$ der grösste gemeinsame Theiler der Zahlen $a_{l+\mu}$. Damit nun die Congruenzen (6.) sich nicht widersprechen, müssen die Zahlen $a_{l+\mu}$ sämmtlich durch k theilbar sein, also auch ihr grösster gemeinsamer Divisor $\frac{d'}{d}$.

V. *Ist in einem System von nicht homogenen Congruenzen*

$$a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1}\, x_1 + \cdots + a_{\alpha n}\, x_n \equiv 0$$

der Rang des Systems aller Coefficienten gleich $l+1$ *und der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten* $(l+1)$*ten Grades gleich* d'*, dagegen der Rang des Systems der Coefficienten der Unbekannten gleich* l *und der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten* l*ten Grades in diesem Systeme gleich* d*, so haben die Congruenzen keine Lösung, wenn der Modul nicht in* $\frac{d'}{d}$ *aufgeht.*

Diese Bedingung ist, falls k relativ prim zu d ist, nach Satz IV. nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, wie sich aus der Normalform (6.) leicht bestätigen lässt. Haben z. B. die $m+1$ Zahlen a_α und k keinen Divisor gemeinsam, und sind die Determinanten $a_\alpha\, b_\beta - a_\beta\, b_\alpha$ sämmtlich durch k theilbar, so haben die m Congruenzen $a_\alpha\, x \equiv b_\alpha$ (mod. k) eine und nur eine Lösung. Bestimmt man die Zahlen c_α und j so, dass $\Sigma\, a_\alpha\, c_\alpha + kj = 1$ wird, so ist $x \equiv \Sigma\, b_\alpha\, c_\alpha$. (*Arndt*, d. J. Bd. 56, S. 67). Mit Hülfe dieses Resultats lässt sich der Satz II, §. 3 auch folgendermassen beweisen: Da die Zahlen $a_{\alpha\beta}$ nicht sämmtlich verschwinden sollen, so sei a_{12} von Null verschieden und h der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}$. Weil nun nach der Voraussetzung jenes Satzes

$$a_{1\alpha}\, a_{2\beta} - a_{1\beta}\, a_{2\alpha} = a_{12}\, a_{\alpha\beta}$$

ist, so sind, wenn man $a_{12} = hk$ setzt, die Determinanten

$$\frac{a_{1\alpha}}{h}\, a_{2\beta} - \frac{a_{1\beta}}{h}\, a_{2\alpha} = k\, a_{\alpha\beta}$$

sämmtlich durch k theilbar. Daher kann man eine Zahl $x = a$ bestimmen, welche den n Congruenzen

$$\frac{a_{1\alpha}}{h}\, x \equiv a_{2\alpha} \pmod{k}$$

genügt.

Setzt man dann

$$a_{1\alpha} = h P_\alpha, \quad a_{2\alpha} h - a_{1\alpha} a = h k Q_\alpha,$$

so ist

$$h^2 k (P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha) = h\ (a_{1\alpha} a_{2\beta} - a_{1\beta} a_{2\alpha}) = h^2 k\, a_{\alpha\beta},$$

also (vgl. *Gauss,* D. A., §. 243)

$$a_{\alpha\beta} = P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha.$$

§. 11. Die Aequivalenz bilinearer Formen in Bezug auf einen Modul.

Zwei Formen $A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ und $G = \Sigma g_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ der Variabeln $x_1, \dots x_m;\ y_1, \dots y_n$ heissen *congruent* (mod. k), wenn $a_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}$ (mod. k) ist. Alle mit A congruenten Formen haben die Gestalt $A + kU$, wo $U = \Sigma u_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ eine Form mit willkürlichen Coefficienten ist. Wenn A durch die Substitutionen

$$(1.) \qquad x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma, \quad y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta} y'_\delta$$

in $B + kD$ übergeht, so wird auch jede mit A congruente Form $A + kU$ durch jene Substitutionen oder durch andere, deren Coefficienten ihren Coefficienten der Reihe nach congruent sind, in eine mit B congruente Form $B + kV$ transformirt. Um dies Verhältniss kurz bezeichnen zu können, will ich sagen, A gehe durch die Substitutionen

$$(2.) \qquad x_\alpha \equiv \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma, \quad y_\beta \equiv \sum_\delta q_{\beta\delta} y'_\delta \ (\text{mod. } k)$$

in B über, indem ich unter dem Zeichen $x_\alpha \equiv \Sigma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma$ irgend eine der Substitutionen $x_\alpha = \Sigma (p_{\gamma\alpha} + k w_{\gamma\alpha}) x'_\gamma$ verstehe, deren Coefficienten und Determinanten (mod. k) congruent sind. Sei nun jede der beiden Substitutionsdeterminanten

$$|p_{\gamma\alpha}| = p, \quad |q_{\beta\delta}| = q$$

relativ prim zu k, sei

$$pp' \equiv 1, \quad qq' \equiv 1, \quad pp'qq' = 1 + kj,$$

und sei $r_{\alpha\gamma}$ [$s_{\delta\beta}$] das Product aus p' [q'] in den Coefficienten, mit dem $p_{\gamma\alpha}$ [$q_{\beta\delta}$] in der Determinante p [q] multiplicirt ist. Dann geht $B + kD$ durch die Substitutionen

$$(3.) \qquad x'_\alpha = \sum_\gamma r_{\gamma\alpha} x_\gamma, \quad y'_\beta = \Sigma s_{\beta\delta} y_\delta,$$

deren Determinanten $p^{n-1}p'^n$ und $q^{n-1}q'^n$ relativ prim zu k sind, in

$$pp'qq'A = A + k(jA) = A + kC$$

über, oder B wird durch die Substitutionen

$$(4.)\qquad x'_\alpha \equiv \sum_\gamma r_{\gamma\alpha} x_\alpha,\quad y'_\beta \equiv \sum_\delta s_{\beta\delta} y_\delta \pmod{k}$$

in A transformirt. Die Gleichungen (3.) sind nicht die Lösungen der Gleichungen (1.), aber die Congruenzen (4.) sind, falls die Variabeln ganzzahlige Werthe haben, die Lösungen der Congruenzen (2.).

Zwei Formen, von denen jede in eine der andern congruente Form durch Substitutionen übergeführt werden kann, deren Determinanten relativ prim zum Modul k sind, heissen *äquivalent* (mod. k). Ist $A \equiv B$ (mod. k), so sind die beiden Formen auch (mod. k) äquivalent. Sind zwei Formen äquivalent (im Sinne des §. 1), so sind sie in Bezug auf jeden Modul äquivalent.

Eine Determinante λten Grades von $A + kU$ ist eine ganze Function der Variabeln $u_{\alpha\beta}$, welche in Bezug auf jede derselben linear ist. Der grösste gemeinsame Divisor aller Werthe dieser Function ist daher (§. 9) gleich dem grössten gemeinsamen Divisor ihrer Coefficienten. Diese aber sind 1) eine gewisse Determinante λten Grades d von A, 2) jede erste Unterdeterminante von d, multiplicirt mit k, 3) jede zweite Unterdeterminante von d, multiplicirt mit k^2, u. s. w., $\lambda+1$) die Zahl k^λ. Bildet man also für jede mit A congruente Form sämmtliche Determinanten λten Grades, so ist der grösste gemeinsame Divisor r_λ aller dieser Determinanten gleich demjenigen der Zahlen

$$(5.)\qquad d_\lambda,\quad d_{\lambda-1}k,\quad d_{\lambda-2}k^2, \ldots k^\lambda,$$

wo d_λ den grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten λten Grades von A bezeichnet. Diese Zahl r_λ heisst der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades von A (mod. k). Da die Determinanten λten Grades aller mit A congruenten Formen sämmtlich durch $r_{\lambda-1}$ theilbar sind, so ist auch r_λ durch $r_{\lambda-1}$ theilbar. Der Quotient $\frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1}} = s_\lambda$ heisst der λte Elementartheiler von A (mod. k). Ich werde beweisen, dass s_λ durch $s_{\lambda-1}$ theilbar ist. Ist $s_{l+1} \equiv 0$ (mod. k), s_l aber nicht, so heisst l der Rang von A (mod. k).

Sei nun B eine der Form A (mod. k) äquivalente Form und r'_λ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades von B (mod. k). Ist U eine willkürliche Form und geht $A+kU$ durch die Substitutionen (1.) in $B+kV$ über, so wird $B+kV$ durch die Substitutionen (3.) in $(1+kj)(A+kU)$ transformirt. Folglich ist jede Determinante λten Grades der letzteren Form eine lineare Verbindung von Determinanten λten Grades der Form $B+kV$, also durch r'_λ theilbar. Daher ist auch der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades aller Formen $(1+kj)(A+kU)$, also $(1+kj)^\lambda r_\lambda$ durch r'_λ theilbar. Nun ist aber r'_λ ein Divisor von k^λ, also relativ prim zu $1+kj$, und mithin ist r_λ durch r'_λ theilbar. Da sich ebenso zeigen lässt, dass auch r'_λ durch r_λ theilbar ist, so muss folglich $r'_\lambda = r_\lambda$ sein. Die Zahlen r_λ und daher auch die Zahlen s_λ haben also für alle (mod. k) äquivalenten Formen die nämlichen Werthe.

Dass auch umgekehrt zwei Formen (mod. k) äquivalent sind, wenn sie in den Elementartheilern (mod. k) übereinstimmen, lässt sich ganz in der nämlichen Weise, wie in den §§. 3—5 zeigen. Um nicht die ganze Reihe der dort angestellten Betrachtungen noch einmal durchgehen zu müssen, ziehe ich es vor, den betreffenden Beweis auf das dort erhaltene Resultat zurückzuführen. Ist e_μ der μte Elementartheiler von A, so ist A der Form $F=\Sigma e_\mu x_\mu y_\mu$ äquivalent. Da e_μ durch $e_{\mu-1}$ theilbar ist, so sei e_{l+1} durch k theilbar, e_l aber nicht. Dann ist F der Form $G = \Sigma e_\lambda x_\lambda y_\lambda$ congruent, wo sich λ von 1 bis l bewegt. Ist s_λ der grösste gemeinsame Divisor von k und e_λ, so kann man eine Zahl q_λ finden, welche der Congruenz $e_\lambda y \equiv s_\lambda$ (mod. k) genügt und relativ prim zu k ist. Denn ist b irgend eine bestimmte Wurzel der Congruenz $\frac{e_\lambda}{s_\lambda} y \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{k}{s_\lambda}\right)$, so ist $q_\lambda = \frac{k}{s_\lambda} x + b$, und da b und $\frac{k}{s_\lambda}$ theilerfremd sind, so kann man (§.4) x so wählen, dass q_λ relativ prim zu k ist. Ersetzt man nun in G die Variabeln y_λ durch $q_\lambda y_\lambda$, so führt man eine Substitution aus, deren Determinante $q = q_1 q_2 \dots q_l$ relativ prim zu k ist. Daher ist A der Form $\Sigma e_\lambda q_\lambda x_\lambda y_\lambda$, und folglich auch der ihr congruenten Form

$$(6.) \qquad S = s_1 x_1 y_1 + s_2 x_2 y_2 + \dots + s_l x_l y_l$$

(mod. k) äquivalent. Da e_λ durch $e_{\lambda-1}$ theilbar ist, so ist der grösste gemeinsame Divisor $s_{\lambda-1}$ von k und $e_{\lambda-1}$ auch ein gemeinsamer Divisor von k und e_λ, und mithin ist s_λ durch $s_{\lambda-1}$ theilbar. Weil ferner s_λ ein Divisor von k ist, so sind die Determinanten λten Grades aller Formen $S+kW$, wo W eine willkürliche Form ist, durch $s_1 s_2 \dots s_\lambda = r_\lambda$ theilbar, und eine bestimmte Determinante λten Grades von S ist gleich r_λ. Da A und S (mod. k) äquivalent sind, so muss folglich r_λ auch der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades und $s_\lambda = \frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1}}$ der λte Elementartheiler von A (mod. k) sein. Daraus folgt zunächst:

I. *Ist in einem System von ganzen Zahlen, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind, r_λ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades (mod. k), so sind nicht nur die Quotienten $\frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1}} = s_\lambda$, sondern auch die Quotienten $\frac{s_\lambda}{s_{\lambda-1}}$ und $\frac{k}{s_\lambda}$ ganze Zahlen.*

Dieser Satz lässt sich auch aus der Bemerkung schliessen, dass die Zahlen s_λ die Elementartheiler des Systems

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & k \end{matrix}$$

sind. Ferner ergiebt sich:

II. *Ist d_λ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades einer Form und r_λ derselbe (mod. k), und ist e_λ der λte Elementartheiler der Form und s_λ derselbe (mod. k), so ist r_λ der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen d_λ, $d_{\lambda-1}k$, $d_{\lambda-2}k^2, \dots k^\lambda$ und s_λ der von k und e_λ.*

Die Uebereinstimmung der nach diesen beiden Regeln berechneten Zahlen r_λ und $s_1 s_2 \dots s_\lambda$ ist in §. 9 direct bewiesen worden. Ist l der Rang von A (§. 1), so habe ich $e_{l+\mu} = d_{l+\mu} = 0$ gesetzt. Entsprechend dem eben bewiesenen Satze werde ich, wenn l den Rang von A (mod. k) bezeichnet, $s_{l+\mu} = k$ und $r_{l+\mu} = r_l k^\mu$ setzen.

Aus der Möglichkeit A auf eine Normalform S zu reduciren, deren Coefficienten die Elementartheiler von A (mod. k) sind, ergiebt sich, wie

in §. 5, dass die Uebereinstimmung der Elementartheiler (mod. k) die hinreichende Bedingung für die Aequivalenz zweier Formen (mod. k) ist. Die Variabeln x_λ der Form S sind die nämlichen wie die der Form F, gehen also aus den Variabeln x_λ der Form A durch eine unimodulare Substitution hervor. Daraus folgt:

III. *Zwei Formen, welche (mod. k) äquivalent sind, können durch zwei Substitutionen in einander transformirt werden, von deren Determinanten die eine gleich eins, die andere relativ prim zu k ist.*

Ist der Rang von A (im Sinne des §. 1) gleich l und der Modul $k = e_l$, so ist der grösste gemeinsame Divisor s_λ von k und e_λ gleich e_λ. Daraus folgt:

IV. *Haben zwei Formen denselben Rang l und denselben $l$ten Elementartheiler k, und sind sie (mod. k) äquivalent, so sind sie absolut äquivalent.*

V. *Haben zwei Formen denselben Rang l und denselben $l$ten Elementartheiler k, und sind sie (mod. k) congruent, so sind sie äquivalent.*

Geht die Form A durch die Substitutionen (2.) in B und diese durch die Substitutionen (4.) in A über, und setzt man

$$A_\alpha = a_{\alpha 1}\, y_1 + a_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + a_{\alpha n}\, y_n,$$

$$B_\alpha = b_{\alpha 1}\, y'_1 + b_{\alpha 2}\, y'_2 + \cdots + b_{\alpha n}\, y'_n,$$

so ist

$$(7.)\qquad B_\gamma \equiv \sum_\alpha p_{\gamma\alpha} A_\alpha, \qquad A_\alpha \equiv \sum_\gamma r_{\alpha\gamma} B_\gamma,$$

$$(8.)\qquad y_\beta \equiv \sum_\delta q_{\beta\delta}\, y'_\delta, \qquad y'_\delta \equiv \sum_\beta s_{\delta\beta}\, y_\beta.$$

Durch diese Congruenzen wird jedem Werthsysteme A_α ein Werthsystem B_α zugeordnet. Zwei congruenten Werthsystemen A_α entsprechen zwei congruente Werthsysteme B_α und umgekehrt. Folglich müssen auch zwei incongruenten Werthsystemen A_α zwei incongruente Werthsysteme B_α entsprechen. Durch die Formen B_α können also ebenso viele (mod. k) incongruente Zahlensysteme dargestellt werden, wie durch die Formen A_α.

VI. *Sind die Formen A und B (mod. k) äquivalent, so ist $(A, k) = (B, k)$.*

Sind also A und B absolut äquivalent, so ist $(A, k) = (B, k)$. Da z. B. A der conjugirten Form $A' = \Sigma\, a_{\beta\alpha}\, x_\alpha\, y_\beta$ äquivalent ist (§. 5), so ist $(A, k) = (A', k)$:

VII. *Die Anzahl der (mod. k) incongruenten Zahlensysteme, welche die m Formen*

$$a_{\alpha 1}\, y_1 + a_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + a_{\alpha n}\, y_n$$

darstellen können, ist ebenso gross, wie die Anzahl der (mod. k) incongruenten Zahlensysteme, welche durch die n Formen

$$a_{1\beta}\, x_1 + a_{2\beta}\, x_2 + \cdots + a_{m\beta}\, x_m$$

darstellbar sind.

Aus jeder Lösung der Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$ ergiebt sich durch die Formeln (8.) eine Lösung der Congruenzen $B_\alpha \equiv 0$ und umgekehrt. Da zwei congruenten Lösungen des einen Congruenzensystems zwei congruente Lösungen des andern entsprechen, so haben beide Systeme gleich viele Lösungen $|A,k| = |B,k|$. Ist B die Normalform, so ist $B_\lambda = s_\lambda y'_\lambda$, $B_{l+\mu} = 0$. Die Anzahl der Lösungen dieser Congruenzen ist aber, weil k durch s_λ theilbar ist, gleich $s_1 s_2 \ldots s_l k^{n-l}$, oder wenn man $s_{l+\mu} = k$ setzt, $s_1 s_2 \ldots s_n = r_n$. Bemerkt man noch, dass man zu den Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$ beliebig viele identische, also zu dem System A beliebig viele Zeilen von Elementen hinzufügen kann, die durch k theilbar sind, so kann man den Satz aussprechen:

VIII. *Die Anzahl der incongruenten Lösungen der homogenen linearen Congruenzen*

$$a_{\alpha 1}\, y_1 + a_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + a_{\alpha n}\, y_n \equiv 0 \quad (\text{mod. } k)$$

ist gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der Determinanten $n$ten Grades aller mit dem System A der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ congruenten Systeme, oder wenn d_λ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades und e_λ der λte Elementartheiler von A und s_λ der grösste gemeinsame Divisor von k und e_λ ist, gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der Zahlen k^n, $k^{n-1} d_1$, $k^{n-2} d_2, \ldots d_n$ oder gleich $s_1 s_2 \ldots s_n$.

Mittelst der Relation (4.), §. 10 ergeben sich daraus die verschiedenen in §. 9 entwickelten Bestimmungen der Zahl (A,k). Die Congruenzen $s_\lambda y'_\lambda \equiv 0$ besitzen die n Lösungen

$$y'_1 = 0, \ldots y'_{\beta-1} = 0,\ y'_\beta = \frac{k}{s_\beta},\ y'_{\beta+1} = 0, \ldots y'_n = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots n),$$

deren Determinante $\prod\left(\frac{k}{s_\beta}\right)=(A,k)$ ist. Da man nach Satz III. annehmen kann, dass die Substitution (8.) unimodular ist, so ergiebt sich daraus wieder der Satz I., §. 10. Ist der Rang von A gleich n und sind e_n und k theilerfremd, so ist $s_n=1$, $s_\beta=1$, $r_n=1$. Da jede Primzahl, welche in e_n aufgeht, auch in d_n enthalten ist, so folgt daraus:

IX. *Ein System homogener linearer Congruenzen zwischen n Unbekannten wird stets und nur dann einzig und allein durch Werthe befriedigt, die congruent Null sind, wenn der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $n$ten Grades des Coefficientensystems zum Modul theilerfremd ist.*

Ist aber $e_n=k$, so ist $s_\beta=e_\beta$, $r_\beta=d_\beta$. In Verbindung mit Satz I, §. 10 und Formel (3.), §. 9 folgt daraus:

X. *Wenn in einem System homogener linearer Congruenzen zwischen n Unbekannten der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $n$ten Grades gleich d und derjenige der Determinanten $(n-1)$ten Grades gleich d' ist, so haben die Congruenzen in Bezug auf den Modul $k=\frac{d}{d'}$ genau d incongruente Lösungen, und besitzen ein System von n Lösungen, deren Determinante gleich $\frac{k^n}{d}$ ist.*

Endlich lässt sich der Satz II, §. 8 auch so aussprechen:

XI. *Damit mehrere homogene lineare Congruenzen zwischen n Unbekannten durch n Zahlen befriedigt werden, welche keinen Theiler gemeinsam haben, ist nothwendig und hinreichend, dass der Modul in den $n$ten Elementartheiler des Coefficientensystems aufgeht.*

Sind mehrere Lösungen der Congruenzen

$$A_\alpha = a_{\alpha 1}\, y_1 + a_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + a_{\alpha n}\, y_n \equiv 0 \pmod{k}$$

gefunden,

$$(9.)\qquad y_1\equiv b_{1\beta},\quad y_2\equiv b_{2\beta},\cdots y_n\equiv b_{n\beta},\quad (\beta=1,2,3,\ldots),$$

so kann man aus ihnen neue Lösungen

$$(10.)\qquad y_1\equiv \Sigma\, b_{1\beta}\, z_\beta,\quad y_2\equiv \Sigma\, b_{2\beta}\, z_\beta,\cdots y_n\equiv \Sigma\, b_{n\beta}\, z_\beta$$

zusammensetzen. Erhält man auf diese Weise alle incongruenten Lösungen, so heisst das System der Lösungen (9.) ein Fundamentalsystem, und

die Congruenzen

$$B_\beta = b_{1\beta} x_1 + b_{2\beta} x_2 + \cdots + b_{n\beta} x_n \equiv 0 \pmod{k}$$

werden den Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$ *adjungirt* genannt.

Zwischen den Coefficienten zweier adjungirten Systeme von Congruenzen bestehen die Relationen

$$(11.) \qquad a_{\alpha 1} b_{1\beta} + a_{\alpha 2} b_{2\beta} + \cdots + a_{\alpha n} b_{n\beta} \equiv 0.$$

Ist B das Coefficientensystem der Formen B_β, so ist nach Satz VII. die Anzahl (B,k) der (mod. k) incongruenten Zahlensysteme, welche die Formen B_β darstellen können, gleich der Anzahl derer, welche durch die n Formen (10.) der Variabeln z_β darstellbar sind. Diese Formen stellen für alle Werthe der Variabeln z_β Lösungen der Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$ dar. Dieselben besitzen aber $|A,k|$ incongruente Lösungen. Bilden also die Lösungen (9.) ein Fundamentalsystem, so müssen sich durch die Linearformen (10.) $(B,k) = |A,k|$ Zahlensysteme darstellen lassen, welche (mod. k) incongruent sind. Zufolge der Gleichungen (§. 10, (4.))

$$(12.) \qquad |A,k|\ (A,k) = k^n, \quad |B,k|\ (B,k) = k^n$$

wird daher die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Lösungen (9.) der Congruenzen $A_\alpha \equiv 0$ ein Fundamentalsystem bilden, durch jede der vier Gleichungen

$$(13.) \qquad \begin{array}{ll} |A,k| = (B,k), & (A,k) = |B,k|, \\ |A,k|\ |B,k| = k^n, & (A,k)\ (B,k) = k^n \end{array}$$

ausgedrückt. In Verbindung mit den Relationen (11.) folgt aus der Symmetrie dieser Gleichungen, dass die Zahlen

$$x_1 \equiv a_{\alpha 1}, \quad x_2 \equiv a_{\alpha 2}, \cdots x_n \equiv a_{\alpha n} \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Congruenzen $B_\beta \equiv 0$ bilden. Sind also die Formen B_β den Formen A_α adjungirt, so sind auch die Formen A_α den Formen B_β adjungirt.

§. 12. Aequivalenz von Systemen linearer Formen.

Wenn die m unabhängigen linearen Formen

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha n} x_n \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

mit ganzzahligen Coefficienten durch die lineare Substitution

$$(P.) \qquad x_\beta = p_{\beta 1} y_1 + p_{\beta 2} y_2 + \cdots + p_{\beta n} y_n \quad (\beta = 1, 2, \ldots n)$$

von der Determinante ± 1, in die m Formen

$$B_\alpha = b_{\alpha 1}\, y_1 + b_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + b_{\alpha n}\, y_n$$

übergehen, so heissen die beiden Formensysteme *äquivalent.* Durch die inverse Substitution

$$(Q.) \qquad y_\beta = q_{\beta 1}\, x_1 + q_{\beta 2}\, x_2 + \cdots + q_{\beta n}\, x_n$$

gehen dann die Formen B_α in die Formen A_α über, und es bestehen die Gleichungen

$$(1.) \qquad b_{\alpha\beta} = a_{\alpha 1}\, p_{1\beta} + a_{\alpha 2}\, p_{2\beta} + \cdots + a_{\alpha n}\, p_{n\beta},$$

$$(2.) \qquad a_{\alpha\beta} = b_{\alpha 1}\, q_{1\beta} + b_{\alpha 2}\, q_{2\beta} + \cdots + b_{\alpha n}\, q_{n\beta}.$$

Das System B der Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ ist also aus den Systemen A und P der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ und $p_{\alpha\beta}$ zusammengesetzt, und das System A aus B und Q. Sind die m Formen A_α den m Formen B_α äquivalent, so sind auch irgend μ der Formen A_α den entsprechenden μ Formen B_α äquivalent. Sind A' und B' die Systeme der Coefficienten dieser zwei Mal μ Formen, so ist jede Determinante μten Grades von B' eine lineare Verbindung der Determinanten μten Grades von A' und umgekehrt. Folglich ist der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten μten Grades von A' gleich dem der Determinanten μten Grades von B'. Die Gesammtheit dieser Bedingungen ist aber noch nicht hinreichend, damit die Formen A_α und B_α äquivalent seien, wie schon das Beispiel $m=n=2$, $A_1 = ax$, $A_2 = bx + cx'$ zeigt (vgl. *Gauss,* D. A. 206).

Bezeichnet man das Coefficientensystem

$$a_{\alpha 1}, \cdots a_{\alpha n}, b_{\alpha 1}, \cdots b_{\alpha n} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

mit D, so lässt sich jede Determinante $m$ten Grades von D als eine lineare Verbindung von Determinanten $m$ten Grades von A [oder B] darstellen. Da ferner das System A [oder B] einen Theil von D bildet, so muss der grösste gemeinsame Divisor h der Determinanten $m$ten Grades in dem System D ebenso gross sein, wie in A [oder B]. Ich behaupte nun:

I. *Damit die Formensysteme A_α und B_α äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $m$ten Grades in den drei Systemen A, B und D den nämlichen Werth habe.*

Mit andern Worten (§. 9, III):

II. *Damit die Formensysteme* A_α *und* B_α *äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass* $(A, B) = (B, A) = 1$ *sei.*

Zu den m Zeilen des Systems A kann man $n-m$ Zeilen von je n Elementen $a_{\nu\beta}$ $(\nu = m+1, \dots n;\ \beta = 1, \dots n)$ und zu den m Zeilen von B noch $n-m$ Zeilen $b_{\nu\beta}$ so hinzufügen, dass die Determinanten $n$ten Grades $|a_{\alpha\beta}|$ und $|b_{\alpha\beta}|$ gleich h werden (§. 8, VI). Wenn sich nun durch Auflösung der n Gleichungen

$$(3.)\qquad a_{\alpha 1}\, x_1 + a_{\alpha 2}\, x_2 + \cdots + a_{\alpha n}\, x_n = b_{\alpha 1}\, y_1 + b_{\alpha 2}\, y_2 + \cdots + b_{\alpha n}\, y_n$$

die Gleichungen

$$(4.)\qquad x_\beta = p_{\beta 1}\, y_1 + p_{\beta 2}\, y_2 + \cdots + p_{\beta n}\, y_n$$

ergeben, so ist die Determinante $|p_{\alpha\beta}|$ gleich dem Quotienten der beiden Determinanten $|a_{\alpha\beta}|$ und $|b_{\alpha\beta}|$, also gleich 1. Setzt man ferner

$$r_{\alpha\beta} = |a_{\gamma 1}, \cdots a_{\gamma,\alpha-1}, b_{\gamma\beta}, a_{\gamma,\alpha+1}, \cdots a_{\gamma n}|,$$

so ist $h\, p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}$. Nun ist aber $r_{\alpha\beta}$ eine homogene lineare Function von Determinanten $m$ten Grades des Systems D, also durch h theilbar, und mithin sind die Substitutionscoefficienten $p_{\alpha\beta}$ sämmtlich ganze Zahlen. Endlich ist leicht zu sehen, dass auf dem angegebenen Wege die allgemeinste unimodulare Substitution gefunden wird, welche die Formen A_α in die Formen B_α transformirt.

Wenn eine Aequivalenzbedingung auf die Form $i = j$ gebracht werden kann, wo i eine in bestimmter Weise eindeutig aus den Zahlen $a_{\alpha\beta}$ und j die auf die nämliche Weise aus den Zahlen $b_{\alpha\beta}$ berechnete Grösse bezeichnet, so heisst i eine *Invariante* der Formen A_α. Die oben aufgestellten erforderlichen und genügenden Aequivalenzbedingungen sind nun in so fern unvortheilhaft, als sie nicht die Form $i = j$ haben. Es fragt sich also, ob es möglich ist, ein System von nothwendigen und hinreichenden Aequivalenzbedingungen von der Form $i = j$ zu ermitteln, d. h. ein vollständiges System von Invarianten der Formen A_α aufzustellen.

Ist k irgend eine Zahl, so muss jede Lösung der n linearen Congruenzen

$$(5.)\qquad a_{1\beta}\, z_1 + a_{2\beta}\, z_2 + \cdots + a_{m\beta}\, z_m \equiv 0 \pmod{k} \quad (\beta = 1, 2, \dots n)$$

zufolge der Gleichungen (1.) auch den Congruenzen

$$(6.) \quad b_{1\beta} z_1 + b_{2\beta} z_2 + \cdots + b_{m\beta} z_m \equiv 0 \pmod{k}$$

genügen, und jede Lösung der letzteren den Gleichungen (2.) zufolge auch den ersteren. Man kann nun auf verschiedene Weisen solche Systeme von Congruenzen aufstellen, dass, wenn für sie die obige Bedingung erfüllt ist, auch stets die Formensysteme A_α und B_α äquivalent sein müssen. Ich will hier drei solche Systeme von Congruenzen angeben, das eine aus homogenen, die beiden andern aus nicht homogenen Congruenzen bestehend, welche in dem zweiten direct, in dem dritten nur die einen nach den andern aufgestellt werden können.

III. *Damit die Formensysteme A_α und B_α äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Coefficientensysteme den nämlichen $m$ten Elementartheiler k haben, und dass die Gesammtheit der (incongruenten) Lösungen der Congruenzen* (5.) *mit der Gesammtheit derer der Congruenzen* (6.) *übereinstimme.*

Die Anzahl der Lösungen der Congruenzen (5.) [oder (6.)] ist nach §. 11, X. gleich dem grössten gemeinsamen Divisor h [h'] der Determinanten $m$ten Grades des Systems A [B]. Wenn also die Lösungen der Congruenzen (5.) und (6.) der Reihe nach übereinstimmen, so muss auch $h = h'$ sein. Nach §. 11, X. besitzen die Congruenzen (5.) ein System von m Lösungen

$$z_1 = g_{\alpha 1},\ z_2 = g_{\alpha 2}, \cdots z_m = g_{\alpha m},$$

dessen Determinante gleich $(A, k) = \frac{k^m}{h}$ ist. Man wähle nun ganz wie oben die Zahlen $a_{\nu\beta}$ und $b_{\nu\beta}$ so, dass die Determinanten $n$ten Grades $|a_{\alpha\beta}| = |b_{\alpha\beta}| = h$ sind, und bestimme die Substitution (4.) durch Auflösung der linearen Gleichungen (3.). Um dann zu zeigen, dass die Substitutionscoefficienten $p_{\alpha\beta} = \frac{r_{\alpha\beta}}{h}$ ganze Zahlen sind, multiplicire ich die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{k^m}{h}$$

mit der Determinante $r_{\alpha\beta}$. In dem Producte ist das νte Element der μten Zeile $(\mu \leqq m)$

$$g_{\mu 1} a_{1\nu} + g_{\mu 2} a_{2\nu} + \cdots + g_{\mu m} a_{m\nu},$$

oder wenn $\nu = \alpha$ ist,

$$g_{\mu 1} b_{1\beta} + g_{\mu 2} b_{2\beta} + \cdots + g_{\mu m} b_{m\beta}.$$

Da diese Zahlen nach der Annahme sämmtlich durch k theilbar sind, so muss die betreffende Determinante, deren Werth $r_{\alpha\beta}\frac{k^m}{h}$ ist, durch k^m und folglich $r_{\alpha\beta}$ durch h theilbar sein.

Sei, um zu dem zweiten Congruenzensystem überzugehen, h_λ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades, die sich aus den ersten λ Zeilen des Systems A bilden lassen, und sei H_μ das Elementensystem

$$\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} h_1 & a_{22} h_1 & \cdots & a_{2n} h_1 \\
a_{31} h_2 & a_{32} h_2 & \cdots & a_{3n} h_2 \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\
a_{\mu 1} h_{\mu-1} & a_{\mu 2} h_{\mu-1} & \cdots & a_{\mu n} h_{\mu-1}.
\end{array}$$

Da h_λ durch $h_{\lambda-1}$ theilbar ist, so haben alle Elemente desselben den Divisor h_1, und die Elemente der ersten Zeile keinen grössern Divisor gemeinsam; alle Determinanten zweiten Grades den Divisor $h_1 h_2 = g_2$ und die aus den Elementen der beiden ersten Zeilen gebildeten keinen grösseren Divisor gemeinsam. Betrachten wir allgemein eine Determinante λten Grades, gebildet aus den Elementen der Zeilen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\lambda$ $(\varrho_1 < \varrho_2 \ldots < \varrho_\lambda \leqq \mu)$. Ist $\varrho_1 > 1$, so enthält sie den Factor $h_{\varrho_1 - 1} h_{\varrho_2 - 1} \ldots h_{\varrho_\lambda - 1}$, ist also durch $h_1 h_2 \ldots h_\lambda = g_\lambda$ theilbar. Ist aber $\varrho_1 = 1, \ldots \varrho_\varkappa = \varkappa$, $\varrho_{\varkappa+1} > \varkappa + 1$, so ist die betreffende Determinante nach Absonderung des Factors $h_1 h_2 \ldots h_{\varkappa-1}$ $h_{\varrho_{\varkappa+1}-1} \ldots h_{\varrho_\lambda - 1}$ eine homogene lineare Function von Determinanten $\varkappa$ten Grades, die aus den Elementen der $\varkappa$ ersten Zeilen von A gebildet sind, also durch $h_\varkappa$ theilbar. Mithin ist die Determinante durch $h_1 h_2 \ldots h_{\varkappa-1} h_\varkappa$ $h_{\varkappa+1} \ldots h_\lambda = g_\lambda$ theilbar. Endlich haben die Determinanten λten Grades, die sich aus den Elementen der λ ersten Zeilen bilden lassen, keinen

grösseren Divisor als g_λ gemeinsam. Daher ist $\frac{g_\lambda}{g_{\lambda-1}} = h_\lambda$ der λte Elementartheiler des Systems H_μ. Nun ist, wenn s_α den grössten gemeinsamen Divisor von k und dem αten Elementartheiler e_α des Systems A bezeichnet $(A,k) = \prod\left(\frac{k}{s_\alpha}\right)$. Folglich ist

$$(H_\mu, h_\mu) = \frac{h_\mu}{h_1}\,\frac{h_\mu}{h_2} \cdots \frac{h_\mu}{h_{\mu-1}}\,\frac{h_\mu}{h_\mu},$$

$$(H_{\mu-1}, h_\mu) = \frac{h_\mu}{h_1}\,\frac{h_\mu}{h_2} \cdots \frac{h_\mu}{h_{\mu-1}},$$

also

$$(H_\mu, h_\mu) = (H_{\mu-1}, h_\mu).$$

Mithin sind nach §. 10, III die linearen Congruenzen

$$(7.)\quad a_{1\beta} z_1 + a_{2\beta} h_1 z_2 + \cdots + a_{\mu-1,\beta} h_{\mu-2} z_{\mu-1} + a_{\mu\beta} h_{\mu-1} \equiv 0 \pmod{h_\mu} \quad (\beta = 1,2,\dots n)$$

mit einander verträglich. Sei

$$(8.)\quad z_1 = h_{\mu 1},\quad z_2 = h_{\mu 2}, \cdots z_{\mu-1} = h_{\mu,\mu-1}$$

irgend eine Lösung derselben. Wenn dann h_μ $(\mu = 1, 2, \dots m)$ auch der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten μten Grades ist, die sich aus den Elementen der μ ersten Zeilen des Systems B bilden lassen, und die Zahlen (8.) auch den Congruenzen

$$(9.)\quad b_{1\beta} z_1 + b_{2\beta} h_1 z_2 + \cdots + b_{\mu-1,\beta} h_{\mu-2} z_{\mu-1} + b_{\mu\beta} h_{\mu-1} \equiv 0 \pmod{h_\mu}$$

genügen, so sind die Formensysteme A_α und B_α äquivalent.

Um dies zu beweisen, verfahren wir genau so wie oben. Multiplicirt man dann die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{31} & h_1 h_{32} & h_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ h_{m1} & h_1 h_{m2} & h_2 h_{m3} & \cdots & h_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = h_1 h_2 \dots h_{m-1}$$

mit $r_{\alpha\beta}$, so ist das νte Element der μten Zeile $(\mu \leqq m)$

$$h_{\mu 1}\, a_{1\nu} + h_1\, h_{\mu 2}\, a_{2\nu} + h_2\, h_{\mu 3}\, a_{3\nu} + \cdots + h_{\mu-2}\, h_{\mu,\mu-1}\, a_{\mu-1,\nu} + h_{\mu-1}\, a_{\mu\nu}$$

oder für $\nu = \alpha$

$$h_{\mu 1}\, b_{1\beta} + h_1\, h_{\mu 2}\, b_{2\beta} + h_2\, h_{\mu 3}\, b_{3\beta} + \cdots + h_{\mu-2}\, h_{\mu,\mu-1}\, b_{\mu-1,\beta} + h_{\mu-1}\, b_{\mu\beta}.$$

Die Elemente der μten Zeile sind also sämmtlich durch h_μ theilbar, mithin die ganze Determinante, deren Werth $r_{\alpha\beta}\, h_1\, h_2 \ldots h_{m-1}$ ist, durch $h_1\, h_2 \ldots h_m$, und folglich $r_{\alpha\beta}$ durch $h_m = h$.

Das dritte System von Congruenzen, zu welchem ich mich jetzt wende, werde ich dazu benutzen, jedes der beiden gegebenen Formensysteme auf ein drittes zu reduciren, dessen Coefficienten sämmtlich Invarianten sind. Ist $\frac{h_\lambda}{h_{\lambda-1}} = k_\lambda$, und $a_{1\beta} = k_1\, c_{1\beta}$, so haben die n Zahlen $c_{1\beta}$ keinen Divisor gemeinsam und die Determinanten zweiten Grades des Systems $c_{1\beta}$, $a_{2\beta}$ den grössten gemeinsamen Divisor k_2. Nach §. 10, IV haben daher die Congruenzen

$$(10.)\qquad c_{1\beta}\, z \equiv a_{2\beta} \pmod{k_2}$$

eine und nur eine Lösung $z \equiv k_{21} \pmod{k_2}$, wo k_{21} positiv und $< k_2$ sein mag. Setzt man nun

$$a_{2\beta} - k_{21}\, c_{1\beta} = k_2\, c_{2\beta},$$

so haben die Determinanten zweiten Grades des Systems $c_{1\beta}$, $c_{2\beta}$ keinen Divisor gemeinsam und die Determinanten dritten Grades des Systems $c_{1\beta}$, $c_{2\beta}$, $a_{3\beta}$ den grössten gemeinsamen Divisor k_3. Folglich haben die Congruenzen

$$(11.)\qquad c_{1\beta}\, z + c_{2\beta}\, z' \equiv a_{3\beta} \pmod{k_3}$$

eine und nur eine Lösung $z \equiv k_{31}$, $z' \equiv k_{32} \pmod{k_3}$, wo k_{31} und k_{32} positiv und $< k_3$ seien. Setzt man dann

$$a_{3\beta} - k_{31}\, c_{1\beta} - k_{32}\, c_{2\beta} = k_3\, c_{3\beta},$$

so haben die Determinanten dritten Grades des Systems $c_{1\beta}$, $c_{2\beta}$, $c_{3\beta}$ keinen Divisor gemeinsam und die Determinanten vierten Grades des Systems $c_{1\beta}$, $c_{2\beta}$, $c_{3\beta}$, $a_{4\beta}$ den grössten gemeinsamen Divisor k_4. Folglich haben die Congruenzen

$$(12.)\qquad c_{1\beta}\, z + c_{2\beta}\, z' + c_{3\beta}\, z'' \equiv a_{4\beta} \pmod{k_4}$$

eine und nur eine Lösung $z \equiv k_{41}$, $z' \equiv k_{42}$, $z'' \equiv k_{43}$, u. s. w.

Auf diese Weise gelangt man zu den Gleichungen

(13.) $a_{\alpha\beta} = k_{\alpha 1} c_{1\beta} + k_{\alpha 2} c_{2\beta} + \cdots + k_{\alpha,\alpha-1} c_{\alpha-1,\beta} + k_\alpha c_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, \ldots m;\ \beta = 1, \ldots n)$,

wo die Determinanten $m$ten Grades des Systems $c_{1\beta}, c_{2\beta}, \ldots c_{m\beta}$ keinen Divisor gemeinsam haben. Nach §. 8, VI kann man daher $n-m$ Reihen von je n Elementen $c_{m+1,\beta}, \ldots c_{n\beta}$ so bestimmen, dass die Determinante $n$ten Grades $|c_{\alpha\beta}| = 1$ wird. Durch die Substitution

$$(14.)\qquad c_{\alpha 1} x_1 + c_{\alpha 2} x_2 + \cdots + c_{\alpha n} x_n = u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

gehen dann die Formen A_α in

$$(15.)\qquad K_\alpha = k_{\alpha 1} u_1 + k_{\alpha 2} u_2 + \cdots + k_{\alpha,\alpha-1} u_{\alpha-1} + k_\alpha u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

über. Ein System von m unabhängigen Linearformen kann also auf ein anderes reducirt werden, in welchem $k_{\alpha\alpha}$ positiv und von Null verschieden, und falls $\beta > \alpha$ ist, $k_{\alpha\beta} = 0$, falls $\beta < \alpha$ ist, $k_{\alpha\beta}$ nicht negativ und $< k_{\alpha\alpha}$ ist.

Sind die m Formen K_α den m Formen

$$L_\alpha = l_{\alpha 1} v_1 + l_{\alpha 2} v_2 + \cdots + l_{\alpha,\alpha-1} v_{\alpha-1} + l_\alpha v_\alpha$$

äquivalent, so muss der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades, die sich aus den Elementen der λ ersten Zeilen bilden lassen, für beide Formensysteme derselbe, also $k_1 k_2 \ldots k_\lambda = l_1 l_2 \ldots l_\lambda$ und mithin $k_\lambda = l_\lambda$ sein. Aus der Gleichung $k_1 u_1 = k_1 v_1$ folgt daher $u_1 = v_1$; mithin aus der Gleichung

$$k_{21} u_1 + k_2 u_2 = l_{21} u_1 + k_2 v_2,$$

wenn man der Variabeln u_1 den Werth 1 ertheilt, $k_{21} \equiv l_{21} \pmod{k_2}$, also wenn auch l_{21} zwischen 0 und l_2 liegt, $k_{21} = l_{21}$, und daher der obigen Gleichung zufolge $u_2 = v_2$. Aus der Gleichung

$$k_{31} u_1 + k_{32} u_2 + k_3 u_3 = l_{31} u_1 + l_{32} u_2 + k_3 v_3$$

folgt ebenso, indem man $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ setzt, $k_{31} = l_{31}$, und indem man $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ setzt, $k_{32} = l_{32}$, und daher $u_3 = v_3$, u. s. w. Zwei *reducirte Formensysteme* können also nicht äquivalent sein, ohne in den Coefficienten übereinzustimmen. Folglich bilden die Moduln k_α und die Congruenzwurzeln $k_{\alpha\beta}$ ein vollständiges System von Invarianten der Formen A_α, und

diese Invarianten sind in so fern unabhängig, als sie nur gewissen Ungleichheitsbedingungen zu genügen haben, sonst aber beliebig angenommen werden können.

§. 13. Aequivalenz von Schaaren bilinearer Formen.

Die Sätze, welche ich über Systeme A entwickelt habe, deren Elemente $a_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen sind, gelten auch für solche, deren Elemente ganze Functionen eines Parameters r sind. Zwei bilineare Formen $A = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$ und $B = \Sigma\, b_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$ heissen äquivalent, wenn sie durch Substitutionen in einander übergeführt werden können, deren Coefficienten ganze Functionen von r sind, und deren Determinanten von r unabhängig und von Null verschieden sind. Damit zwei Formen äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass sie dieselben Elementartheiler, also auch denselben Rang besitzen. Ist d_λ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades von A, so sind nicht nur die Quotienten $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = e_\lambda$, sondern auch die Quotienten $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda-1}} = f_\lambda$ ganze Functionen. Ist l der Rang und e_λ der λte Elementartheiler von A, so lässt sich diese Form in $F = e_1\, x_1\, y_1 + e_2\, x_2\, y_2 + \cdots + e_l\, x_l\, y_l$ transformiren, welche die Reducirte von A heisst. Sind zwei alternirende Formen äquivalent, so können sie durch cogrediente Substitutionen in einander transformirt werden. In einer alternirenden Form ist der 2λte Elementartheiler dem $(2\lambda-1)$ten gleich, der Rang eine gerade Zahl, der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten 2λten Grades ein Quadrat.

Die Coefficienten der Substitutionen, welche zwei äquivalente Formen in einander transformiren, werden durch rationale Operationen aus den Coefficienten der Formen gefunden. Sind daher die Coefficienten der einzelnen Potenzen von r in den ganzen Functionen $a_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ algebraische Zahlen eines gewissen Körpers, so kann man A durch Substitutionen in B transformiren, deren Coefficienten demselben Körper angehören. Die Potenzen der irreductibeln Factoren, in welche sich e_λ zerlegen lässt, heissen die einfachen Elementartheiler von A. Unter allen Umständen, d. h. auch wenn die Coefficienten der einzelnen Potenzen von r in

$a_{\alpha\beta}$ keine algebraischen Zahlen sind, kann man die Potenzen der verschiedenen Linearfactoren, deren Product e_λ ist, die einfachen Elementartheiler von A nennen. Die einfachen Elementartheiler einer zerlegbaren Form sind die der einzelnen Theile zusammengenommen.

Sind die Coefficienten der Form A ganze Functionen vom Grade α, so soll α der Grad der Form A genannt werden. Eine Form αten Grades kann auf die Gestalt $A = A_0 r^\alpha + A_1 r^{\alpha-1} + \cdots + A_\alpha$ gebracht werden, wo die bilinearen Formen $A_\varkappa$ den Parameter r nicht enthalten, und die Coefficienten von A_0 nicht sämmtlich verschwinden. Ich nehme jetzt an, dass die Anzahl m der Variabeln x_α der Anzahl n der Variabeln y_β gleich ist. Wenn dann $B = B_0 r^\beta + B_1 r^{\beta-1} + \cdots + B_\beta$ eine Form βten Grades ist und die Determinante $n$ten Grades der Form B_0 nicht verschwindet, so ist das (symbolische) Product $AB = A_0 B_0 r^{\alpha+\beta} + (A_0 B_1 + A_1 B_0) r^{\alpha+\beta-1} + \cdots$ genau vom Grade $\alpha + \beta$. Denn da die Determinante von B_0 nicht verschwindet, so kann nicht $A_0 B_0 = 0$ sein, ohne dass $A_0 = 0$ wäre (*Fr.* §.2, I). Allgemeiner ist der Grad von ABC gleich der Summe der Grade von A, B und C, wenn in zwei der Factoren, z. B. in A und C die Determinanten der Formen, welche mit den höchsten Potenzen von r multiplicirt sind, nicht verschwinden. Ferner gilt der Satz:

I. *Sind die bilinearen Formen A und B in Bezug auf den Parameter r von den Graden α und $\beta \leqq \alpha$, und ist die Determinante der Form, welche den Coefficienten von r^β in B bildet, von Null verschieden, so giebt es eine und nur eine Form Q vom Grade $\alpha - \beta$ und eine Form C von niedrigerem als dem βten Grade, welche der Gleichung*

$$A = QB + C \text{ oder } A = BQ + C$$

Genüge leisten.

Ist $\gamma = \alpha - \beta$, so ist die Form $Q = Q_0 r^\gamma + Q_1 r^{\gamma-1} + \cdots + Q_\gamma$ so zu bestimmen, dass der Grad der Form $A - QB = C$ kleiner als β wird. Daher muss

$$A_0 = Q_0 B_0,\ A_1 = Q_1 B_0 + Q_0 B_1,\ A_2 = Q_2 B_0 + Q_1 B_1 + Q_0 B_2, \ldots$$
$$A_\gamma = Q_\gamma B_0 + Q_{\gamma-1} B_1 + \cdots + Q_0 B_\gamma$$

sein. Da die Determinante von B_0 nicht verschwindet, so ergiebt sich aus diesen Gleichungen successive

$$Q_0 = A_0 B_0^{-1},\ Q_1 = (A_1 - Q_0 B_1) B_0^{-1} = A_1 B_0^{-1} - A_0 B_0^{-1} B_1 B_0^{-1}, \text{ u. s. w.}$$

Ganz analog findet man die Formen Q und C, welche die Gleichung $A = BQ + C$ befriedigen.

Seien nun $A = A_0 r + A_1$ und $B = B_0 r + B_1$ zwei Formen, die in Bezug auf r vom ersten Grade sind, und in denen die Determinanten von A_0 und B_0 nicht verschwinden. Dann ist der Rang von A, wie von B gleich n. Besitzen ferner beide Formen dieselben Elementartheiler, so sind sie äquivalent, und es können durch rationale Operationen zwei Substitutionen P_0, Q_0 so bestimmt werden, dass

$$P_0 A Q_0 = B$$

wird. Die Coefficienten von P_0 und Q_0 sind ganze Functionen von r, ihre Determinanten aber sind von r unabhängig und von Null verschieden. Daher sind auch die Coefficienten der inversen Substitutionen

$$P_0^{-1} = R_0, \quad Q_0^{-1} = S_0$$

ganze Functionen von r, und es bestehen die Gleichungen

$$P_0 A = B S_0, \quad A Q_0 = R_0 B.$$

Man bestimme nun die Formen $P, P_1, \dots S, S_1$ so, dass

$$P_0 = B P_1 + P, \quad Q_0 = Q_1 B + Q,$$
$$R_0 = A R_1 + R, \quad S_0 = S_1 A + S$$

ist, und dass der Grad z. B. von R kleiner ist, als der von A, also weil A und B vom ersten Grade sind, dass P, Q, R, S den Parameter r nicht enthalten. Dann ist

$$P_0 A = B S_0 = B P_1 A + PA = B S_1 A + BS,$$
$$B(P_1 - S_1) A = BS - PA.$$

Wäre nun $P_1 - S_1$ nicht Null, so wäre der Grad der linken Seite wenigstens gleich 2, während die rechte Seite nur vom ersten Grade sein kann. Daher muss $P_1 = S_1$ und

$$(1.) \qquad BS = PA$$

sein. Die reciproke Form S_0 von Q_0 ist durch die Gleichung

$$Q_0 S_0 = E = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

definirt. Demnach ist

$$E = Q_0 S_1 A + Q_0 S = Q_0 S_1 A + Q_1 BS + QS$$

oder nach Gleichung (1.)

$$E - QS = Q_0 S_1 A + Q_1 PA = (Q_0 S_1 + Q_1 P) A.$$

Wäre nun $Q_0 S_1 + Q_1 P$ nicht Null, so wäre die rechte Seite mindestens vom ersten Grade, während die linke von r unabhängig ist. Mithin ist

$$(2.) \qquad QS = E.$$

S ist also die reciproke Form von Q und beider Determinanten sind von Null verschieden, weil ihr Product gleich eins, der Determinante von E_1 ist. Aus den Gleichungen (1.) und (2.) ergiebt sich

$$(3.) \qquad PAQ = B,$$

und weil die Determinante von B nicht verschwindet, so kann auch die von P nicht Null sein.

II. *Wenn zwei Formen von nicht verschwindender Determinante, welche einen Parameter im ersten Grade enthalten, dieselben Elementartheiler besitzen, so können sie durch Substitutionen in einander transformirt werden, deren Coefficienten von dem Parameter unabhängig sind.*

Dies ist der in der Einleitung besprochene Satz des Herrn *Weierstrass* über die Aequivalenz von Schaaren bilinearer Formen. Sind A und B alternirende Formen, so kann man sie durch cogrediente Substitutionen in einander transformiren, also wenn man die conjugirte Form irgend einer Form C mit C' bezeichnet, $Q_0 = P_0'$ voraussetzen (*Fr.* S. 22). Vertauscht man dann in der Gleichung $P_0 = BP_1 + P$ die Variabeln x_α, y_α mit einander, so erhält man

$$P_0' = P_1'(-B) + P' = (-P_1')B + P' = Q_0 = Q_1 B + Q$$

und daher $Q_1 = -P_1'$ und $Q = P'$. Wenn also zwei Schaaren alternirender Formen, deren Determinanten nicht verschwinden, dieselben Elementartheiler besitzen, so können sie durch cogrediente, von r unabhängige Substitutionen in einander transformirt werden.

Es fragt sich noch, ob es Formen ersten Grades giebt, welche beliebig vorgeschriebene Elementartheiler besitzen. Die Form

$$R = (r - a)(x_1 y_1 + \cdots + x_e y_e) - (x_1 y_2 + \cdots + x_{e-1} y_e)$$

hat die Determinante $e$ten Grades $(r - a)^e$. Von ihren Determinanten $(e-1)$ten Grades ist eine gleich 1, nämlich die der Form $x_1 y_2 + \cdots + x_{e-1} y_e$.

Daher hat R nur den einen Elementartheiler $(r-a)^\varepsilon$. Ebenso hat

$$R' = (r-a')\,(x_{\varepsilon+1}\,y_{\varepsilon+1} + \cdots + x_{\varepsilon+\varepsilon'}\,y_{\varepsilon+\varepsilon'}) - (x_{\varepsilon+1}\,y_{\varepsilon+2} + \cdots + x_{\varepsilon+\varepsilon'-1}\,y_{\varepsilon+\varepsilon'})$$

nur den einen Elementartheiler $(r-a')^{\varepsilon'}$, u. s. w., wo $a, a', \ldots$ nicht alle verschieden zu sein brauchen. Da die einfachen Elementartheiler der zerlegbaren Form $R + R' + \cdots$ die ihrer einzelnen Theile zusammen sind, so kann man folglich eine Form mit vorgeschriebenen einfachen Elementartheilern bilden*).

Sind allgemeiner $\varphi(r)$, $\varphi_1(r)$, ... ganze Functionen von r, deren Coefficienten algebraische Zahlen eines gewissen Körpers sind, und welche in diesem Körper irreductibel sind, so fragt es sich, ob es eine Form ersten Grades giebt, deren Coefficienten demselben Körper angehören, und welche die einfachen Elementartheiler $(\varphi(r))^\varepsilon$, $(\varphi_1(r))^{\varepsilon'}$, ... besitzt. Ist $\varphi(r) = r^\alpha + a_1 r^{\alpha-1} + \cdots + a_\alpha$, so ist

$$\varphi(r) = \begin{vmatrix} r+a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & r & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & r & -1 & \cdots & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & r & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & r \end{vmatrix},$$

also gleich der Determinante der Form

$$r\,(x_1 y_1 + \cdots + x_\alpha y_\alpha) + y_1\,(a_1 x_1 + \cdots + a_\alpha x_\alpha) - (x_1 y_2 + \cdots + x_{\alpha-1} y_\alpha).$$

Mithin hat die Form von $\alpha\varepsilon = \nu$ Variabelnpaaren**)

$$S = r\,(x_1 y_1 + \cdots + x_\alpha y_\alpha + x_{\alpha+1} y_{\alpha+1} + \cdots + x_\nu y_\nu) + y_1\,(a_1 x_1 + \cdots + a_\alpha x_\alpha)$$
$$+ y_{\alpha+1}\,(a_{\alpha+1} x_{\alpha+1} + \cdots + x_{2\alpha} y_{2\alpha}) + \cdots + y_{\nu-\alpha+1}\,(a_{\nu-\alpha+1} x_{\nu-\alpha+1} + \cdots + x_\nu y_\nu)$$
$$-(x_1 y_2 + \cdots + x_{\alpha-1} y_\alpha + x_\alpha y_{\alpha+1} + x_{\alpha+1} y_{\alpha+2} + \cdots + x_{\nu-1} y_\nu)$$

---

*) Die alternirende Form $(r-a)\,(x_1 y_{2\varepsilon} - x_2 y_{2\varepsilon-1} + \cdots - x_{2\varepsilon} y_1) - (x_1 y_{2\varepsilon-2} - x_2 y_{2\varepsilon-3} + \cdots - x_{2\varepsilon-2} y_1)$ hat die Determinante 2εten Grades $(r-a)^{2\varepsilon}$ und von ihren Determinanten $(2\varepsilon-2)$ten Grades ist eine gleich 1. Nach Formel (4.), §. 7 ist daher der grösste gemeinsame Divisor ihrer Determinanten $(2\varepsilon-1)$ten Grades gleich $(r-a)^\varepsilon$. Man kann daher auch eine alternirende Form ersten Grades mit vorgeschriebenen Paaren von Elementartheilern bilden.

**) Die Glieder $x_\alpha y_{\alpha+1}$, $x_{2\alpha} y_{2\alpha+1}$, ..., welche besonders zu beachten sind, haben nur der Symmetrie halber die Coefficienten -1 erhalten. Man könnte ihnen auch irgend welche andere, von Null verschiedene, Coefficienten geben.

die Determinante νten Grades $(\varphi(r))^e$. Da ferner von ihren Determinanten $(\nu-1)$ten Grades eine gleich 1 ist, so besitzt S nur den einen Elementartheiler $(\varphi(r))^e$. Ganz wie oben kann man nun eine (zerlegbare) Form $S+S'+\cdots$ bilden, deren einfache Elementartheiler beliebig gegebene Potenzen irreductibler Functionen sind.

Die entwickelten Principien bleiben auch in dem Falle anwendbar, wo die Elemente $a_{\alpha\beta}$ des Systems A ganze Functionen von r mit ganzzahligen Coefficienten sind, und zwei solche Functionen nicht als verschieden betrachtet werden, wenn ihre Coefficienten der Reihe nach in Bezug auf den Primzahlmodul p congruent sind. Haben die Determinanten λten Grades (mod. p) den (primären) grössten gemeinsamen Divisor d_λ, so heisst die durch die Congruenz $d_{\lambda-1}\, e_\lambda \equiv d_\lambda$ (mod. p) bestimmte ganze Function e_λ der λte Elementartheiler von A. Die Potenzen der verschiedenen primären Primfunctionen, deren Producte die Zahlen e_λ sind, heissen die einfachen Elementartheiler von A. Zwei bilineare Formen werden äquivalent genannt, wenn die eine in eine der andern congruente Form durch Substitutionen übergeführt werden kann, deren Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen von r sind, und deren Determinanten (mod. p) nicht verschwindenden Zahlen congruent sind.

Sind die äquivalenten Formen $A = A_0 r + A_1$ und $B = B_0 r + B_1$ vom ersten Grade in r, ist $m = n$, und ist die Determinante $n$ten Grades von A nicht für alle Werthe von r durch p theilbar, so kann A in B durch Substitutionen transformirt werden, deren Coefficienten von r unabhängig sind, und welche daher gleichzeitig A_0 in B_0 und A_1 in B_1 verwandeln. Sind $(\varphi(r))^e$, $(\varphi_1(r))^{e'}$, ... die einfachen Elementartheiler von A, also $\varphi(r)$, $\varphi_1(r)$, ... Primfunctionen (mod. p), so kann A auf eine Normalform von der Gestalt $S+S'+\cdots$ reducirt werden, wo S die oben angegebene Bedeutung hat. Bedient man sich der von *Galois* eingeführten complexen Zahlen, so kann man auch die Potenzen der verschiedenen Linearfactoren $(r-a)^e$, $(r-a')^{e'}$, ..., in die sich die Functionen e_λ zerlegen lassen, die complexen einfachen Elementartheiler von A nennen und die bilineare Form A, falls die Determinante von A_0 nicht durch p theilbar ist, in

$$\Sigma\left((r-a)\,(x_1 y_1 + \cdots + x_e y_e) - (x_1 y_2 + \cdots + x_{e-1} y_e)\right)$$

transformiren. Mit einer geringen Modification (welche ermöglicht, dass die Determinante von A_1 durch p theilbar sein kann) ist dies die Normalform, auf welche Herr *Camille Jordan* (*traité des substitutions*, p. 114—126) die Form $A_0 r + A_1$ reducirt hat.

Zürich, April 1878.

Ueber die Kummer'sche Configuration von sechzehn Punkten und sechzehn Ebenen.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Die merkwürdige Configuration, welche von den 16 Knotenpunkten und den 16 singulären Ebenen einer *Kummer*schen Fläche vierten Grades gebildet wird, kann nach den Angaben des Herrn *H. Weber**) linear aus sechs Knotenpunkten construirt werden, und letztere können der *Weber*schen Rechnung zufolge ganz beliebige Lage haben. Die vorliegende Arbeit nun enthält eine directe synthetische Begründung dieser Construction, welche auf einer interessanten Eigenschaft des räumlichen Sechsecks beruht; ausserdem zeigt sie, wie man vom Sechseck ausgehend zu den bislang bekannten, wichtigeren Eigenschaften der *Kummer*schen Configuration gelangt.

Ein vollständiges räumliches Sechseck hat 15 Kanten, welche je zwei, und 20 Ebenen oder Flächen, welche je drei von den sechs Eckpunkten A, B, C, D, E, F verbinden; die 20 Ebenen liegen paarweise einander gegenüber, wie ABC und DEF oder ABD und CEF.

Wir wollen nun fünf von den sechs Eckpunkten, etwa die von F verschiedenen, in einer bestimmten Reihenfolge $ABCDE$ auffassen als ein *einfaches* räumliches Fünfeck, welches selbstverständlich auch mit $BCDEA$, $EDCBA$ u. s. w. bezeichnet werden kann. Dann bilden die fünf Flächen:

$$EAB,\ ABC,\ BCD,\ CDE,\ DEA$$

dieses einfachen Fünfecks mit den fünf Ebenen:

$$EFB,\ AFC,\ BFD,\ CFE,\ DFA,$$

welche die Diagonalen desselben mit dem sechsten Punkte F verbinden, eine solche Gruppe von zehn Sechseckflächen, dass zwei von ihnen durch

---

*) Dieses Journal, Bd. 84, S. 349.

jede der 15 Sechseckkanten gehen. Wir bezeichnen diese Gruppe mit $ABCDE|F$, und bemerken, dass durch Vertauschung der Eckpunkte aus ihr jede analoge Gruppe von 10 Sechseckflächen erhalten wird. Die Gruppen $BCDEA|F$, $EDCBA|F$, ... sind von der obigen nicht verschieden. Den Ebenen der Gruppe $ABCDE|F$ liegen im Sechseck die zehn Ebenen der Gruppe $ACEBD|F$ gegenüber.

Von der Ebenengruppe $ABCDE|F$ unterscheiden sich die fünf Gruppen:

$$FBDCE|A,\quad AFCED|B,\quad EBFDA|C,\quad BACFE|D \text{ und } ACBDF|E$$

nur durch andere Anordnung der zehn Ebenen; sie enthalten nämlich ganz dieselben zehn Sechseckflächen, wie jene. Beispielsweise besteht $FBDCE|A$

aus EFB, FBD, BDC, DCE, CEF
und EAB, FAD, BAC, DAE, CAF.

Jede dieser zehn Ebenen enthält drei Sechseckkanten, durch welche drei von den übrigen neun Ebenen gehen; zu ihr „gehört" der Schnittpunkt dieser drei Ebenen. Die zu den zehn Ebenen gehörigen zehn Punkte aber bilden mit A, B, C, D, E, F zusammen die sechzehn Punkte einer *Kummer*schen Configuration, welche auch die zehn Ebenen $ABCDE|F$ enthält.

Zunächst nämlich leuchtet ein, dass in jeder dieser zehn Ebenen sechs von den 16 Punkten liegen, worunter drei Sechseckpunkte, dass je zwei von den 10 Ebenen sich in zwei von den 16 Punkten schneiden, und dass durch die Punkte A, B, C, D, E, F je fünf und durch die übrigen 10 Punkte je drei von den 10 Ebenen gehen. Wir wollen nun zeigen, dass durch jeden Sechseckpunkt, z. B. durch F, noch eine sechste Ebene geht, welche ebenfalls sechs von den 16 Punkten enthält, und zwar ausser F noch die fünf zu den Ebenen des einfachen Fünfecks $ABCDE$ gehörigen Punkte.

Bekanntlich ist durch das einfache Fünfeck $ABCDE$ ein Nullsystem bestimmt, in welchem zugeordnet sind:

den Ebenen	EAB,	ABC,	BCD,	CDE,	DEA
die resp. Punkte	A,	B,	C,	D,	E

und folglich u. A. der Diagonale $\overline{AC}$ die Schnittlinie der Ebenen **EAB** und **BCD**. Der zu **ABC** gehörige Punkt, welchen diese Schnittlinie mit der Ebene **AFC** gemein hat, ist demnach dieser Ebene zugeordnet, und durch ihn muss die Nullebene φ des Punktes **F** gehen. Ebenso aber geht die Nullebene von **F** durch die zu **BCD**, **CDE**, **DEA** und **EAB** gehörigen Punkte. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass die fünf zu den Ebenen des einfachen Fünfecks **FBDCE** gehörigen Punkte in einer durch **A** gehenden Ebene α liegen; diese Ebene ist in dem durch **FBDCE** bestimmten Nullsysteme dem Punkte **A** zugeordnet. Die Ebenen φ und α schneiden sich in den beiden zu **BCD** und **CDE** gehörigen Punkten, ferner φ und **ABC** in den zu **EAB** und **BCD** gehörigen Punkten, endlich φ und **AFC** schneiden sich in **F** und demjenigen Punkte, welcher zu der Ebene **ABC** gehört.

Zu den zehn Ebenen der Gruppe **ABCDE|F** kommen also noch sechs durch resp. **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** gehende Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$; dieselben vervollständigen die *Kummer*sche Configuration, sodass diese nunmehr 16 Punkte und 16 Ebenen enthält. In jeder der 16 Ebenen liegen sechs von den 16 Punkten, die Schnittlinien der 16 Ebenen fallen zusammen mit den Verbindungslinien der 16 Punkte, und durch jeden von den 16 Punkten gehen, wie man leicht einsieht, sechs von den 16 Ebenen.

In jedem der sechs Nullsysteme, welche durch die sechs einfachen Fünfecke **ABCDE**, **FBDCE**, **AFCED**, **EBFDA**, **BACFE** *und* **ACBDF** *bestimmt sind, ist die Kummersche Configuration sich selber, d. h. ihren 16 Punkten sind ihre 16 Ebenen zugeordnet.* Z. B. in dem ersten dieser Nullsysteme sind den Ebenen des Fünfecks **ABCDE** seine fünf Eckpunkte und dem Punkte **F** die Ebene φ zugeordnet, ausserdem aber, wie vorhin gezeigt wurde:

den Ebenen **AFC**, **BFD**, **CFE**, **DFA**, **EFB**

die zu resp. **ABC**, **BCD**, **CDE**, **DEA**, **EAB** gehörigen Punkte.

Daraus aber und aus der Construction der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass diesen Ebenen die zu resp. **EFB**, **AFC**, **BFD**, **CFE** und **DFA** gehörigen Punkte zugeordnet sind.

Aus den sechs Nullsystemen können rein synthetisch, wie anders-

wo*) bereits gezeigt wurde, fünfzehn geschaart-involutorische Systeme und zehn Polarsysteme abgeleitet werden, in welchen die *Kummer*sche Configuration ebenfalls sich selbst zugeordnet ist. Jedem Punkte der Configuration sind in den 15 involutorischen Systemen die übrigen fünfzehn Punkte, in den sechs Nullsystemen die sechs durch ihn gehenden Ebenen und in den zehn Polarsystemen die zehn nicht durch ihn gehenden Ebenen der Configuration zugeordnet, und Analoges gilt von jeder der 16 Ebenen. Daraus folgt unmittelbar, dass die Gruppen von je sechs Punkten der Configuration, die in den 16 Ebenen liegen, und die Gruppen von je sechs Ebenen, die durch die 16 Punkte gehen, alle zu einander projectiv sind. Wir haben ferner a. a. O. daraus geschlossen, dass die sechs Punkte, welche einer beliebigen Ebene in den sechs Nullsystemen zugeordnet sind, allemal auf einem Kegelschnitt liegen, und dass die sechs einem beliebigen Punkte zugeordneten Ebenen eine Kegelfläche II. Ordnung berühren. Die 16 Punkte der *Kummer*schen Configuration liegen demzufolge zu sechsen auf 16 Kegelschnitten und die 16 Ebenen derselben berühren zu sechsen 16 Kegelflächen II. Ordnung.

Die Punkte A, B, C, D, E bilden zwölf einfache Fünfecke, denn die Anzahl ihrer Combinationen ist 120 und je zehn dieser Combinationen stellen ein und dasselbe einfache Fünfeck dar. Die sechs Punkte A, B, C, D, E, F gehören folglich zu zwölf verschiedenen *Kummer*schen Configurationen, und die Punkte dieser Configurationen liegen zu sechsen auf $16 \,.\, 12 = 192$ Kegelschnitten, während ihre Ebenen zu sechsen 192 Kegelflächen II. Ordnung berühren. Es lässt sich zeigen, dass alle diese Gruppen von Punkten und Ebenen projectiv sind zu der Punktgruppe $ABCDEF$ derjenigen Raumcurve III. Ordnung, welche durch die sechs Punkte bestimmt ist.

Strassburg i. E. den 19. Mai 1878.

---

*) In diesem Bande, S. 102 und 104.

Zur Geschichte des Potentials.

(Von Herrn *R. Baltzer* in Giessen.)

---

1. Wenn die Masse m, mit der ein Punkt belegt ist, zur Epoche t an einem rechtwinkeligen Coordinatensystem den Ort x, y, z hat, und von einem Agens angegriffen die Beschleunigung p erhält, deren Componenten in den Coordinatenrichtungen X, Y, Z sind, so beschreibt sie in der Zeit dt die Bahn $ds = vdt$ mit der Geschwindigkeit v. Ihre Tangentialbeschleunigung $dv : dt$ ist $p \cos ps$, wenn durch ps der Winkel bezeichnet wird, welchen ds mit der Richtung der p bildet. Daher ist

$$v dv = p\, ds\, .\, \cos ps,$$
$$d\, .\, \tfrac{1}{2} mv^2 = mp\, .\, ds\, .\, \cos ps = mp \cos ps\, .\, vdt,$$
$$= m\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Diese Differentialgleichungen und ihre Integrale haben zu einer reichen Bildung von Benennungen und Sätzen (sogenannten Principen) Veranlassung gegeben. Allgemein nennt man mp die Kraft des Agens, mit welcher m von demselben angegriffen wird (vis motrix, *Newton* Princ. I def. 8), und $\frac{1}{2}mv^2$ die halbe lebendige Kraft der bewegten Masse (*Leibniz*, neuerlich wohl auch die lebendige Kraft). Das Product $mp \cos ps \cdot v$ der (auf v oder ds normal projicirten) Kraft mit der Geschwindigkeit heisst bei *Newton* die Action des Agens. Princ. I am Schluss der Einleitung ed. Le Seur et Jaquier p. 60: Actio Agentis si aestimetur ex ejus vi et velocitate conjunctim, etc.

2. Wenn die Kraft $mp \cos ps$ als Function von s gegeben ist, so kann das definite Integral $\int mp \cos ps\, .\, ds$ durch das Product einer Bahnlänge mit einer Kraft (Gewicht) ausgedrückt werden, welches Moment d'activité (*Carnot* 1786), effet dynamique (*Monge, Hachette*), travail total, work, Arbeit des Agens genannt worden ist. Die Arbeits-Einheit hat die Namen Fuss-Pfund, Meter-Kilogramm, Dynamie, Dyname, Dynamode erhalten.

Wenn die Action $mp\cos ps.v$ als Function von t gegeben ist, so kann das definite Integral $\int mp\cos ps.v\,dt$ durch das Product einer Zeit mit einer Action ausgedrückt werden, z. B. in Pferdekraft, deren eine in 1 Sec. 550 Fuss-Pfund englisch oder (nahe) 75 Meter-Kilogramm leistet (*Watt* 1780 ±).

Demgemäss ist $mp\cos ps.ds$ oder $mp\cos ps.v\,dt$ das Differential der von dem Agens auf der Bahn ds oder während der Zeit dt geleisteten Arbeit, und heisst travail élémentaire (*Navier, Poncelet* 1826), moment virtuel (*Duhamel* u. A.). Die letztere Benennung weist auf *Joh. Bernoulli* zurück, der in einem von *Lagrange* citirten Brief 1717 Jan. 26 an *Varignon* (abgedruckt in der posthumen Mechanik *Varignons* 1725 Sect. 9) zwei metaphysisch inficirte Ausdrücke geschaffen hat, von denen der erste alsbald Eingang gefunden hat, während dem andern erst neuerlich Aufnahme zu Theil geworden ist. *Joh. Bernoulli* hat nämlich daselbst die vorhin definirte Action des Agens durch das Product der Kraft des Agens mit der von ihm so genannten vitesse virtuelle $v\cos ps$ der bewegten Masse dargestellt, und die Action selbst als die Energie des Agens bezeichnet.

Daher ergaben sich für die halbe lebendige Kraft einer bewegten Masse die äquivalenten üblichen Ausdrücke.

3. Wenn endlich $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ das Differential einer Function U der x, y, z (des Orts der Masse m) ist, so ist U das sogenannte Potential des Agens in dem Angriffspunkt, $d.\frac{1}{2}mv^2 = m\,dU$, $\frac{1}{2}v^2 - U$ constant. Die Componenten der Beschleunigung p sind die Differentialquotienten der Function U nach x, y, z, und $p\cos ps = dU:ds$. Wenn p nicht Null und $dU = 0$, so ist $\cos ps = 0$, d. h. die Beschleunigung p und die die Bahn ds enthaltende Fläche $dU = 0$ sind normal zu einander, und die angegriffene Masse, wenn sie ruht, ist auf der einen Seite der Fläche, wenn diese solid ist und hinreichenden Widerstand leistet, im Gleichgewicht.

Ein Punkt, in welchem das Potential des Agens den gegebenen Werth c hat, liegt auf der Fläche $U = c$, welche von der Kraft, mit der das Agens die Masse angreift, normal geschnitten wird, und welche von *Clairaut* Figure de la terre 1743 I §.18 eine Niveaufläche, von *Gauss*

Eine orthogo-
nie des Agens
552).
n Potential und
etrop. 1740 t. 7
eben worden*).
ist, dessen recht-
die Masse m_x die
it $m_i\, m_x : r_{ix}^2$ in der
at das von *Lagrange*

$$+ \cdots$$

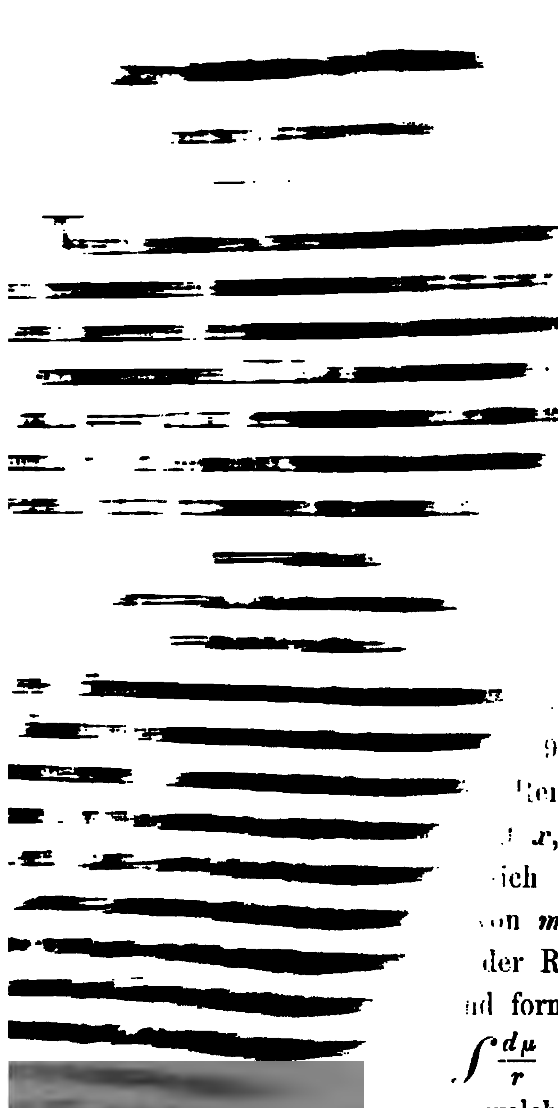
len übrigen Massen ange-
der Epoche t entsprechen,

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

diesen Satz, welcher neuerlich
9 in Erinnerung gebracht worden
Remarques générales etc. gegeben.
x, y, z mit der Masse m belegt
ich erstreckendes Raumdifferential
on m die Distanz r hat, und wenn
der Richtung von m nach $d\mu$ ange-
nd formirte Potential

$$\int \frac{d\mu}{r}$$

, welche m durch die über einen ge-
onen vertheilte Masse einer Linie, einer
Beschleunigung hat die Componenten
Richtungen.



ng mit *Euler*. Die Jahreszahlen der akademi-
für die Chronologie der einzelnen Abhandlungen
nd Reclamationen zu erkennen ist.

Dieses Potential der gegebenen continuirlichen Masse als Function der x, y, z (des Punktes, in dem die Masse sich befindet) ist es, auf welches *Laplace* in den Mém. de Paris 1782 (1785 edirt) seine Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes gebaut hat, und welche *Legendre* (Mém. présentés t. 10 p. 421) von *Laplace* mitgetheilt erhalten hatte. *Lagranges* Priorität ist, wie es scheint, weder damals noch in unsrer Zeit erwähnt worden.

In der citirten Abhandlung von *Laplace* und in der Mécanique céleste ist die Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ gegeben ohne die Einschränkung, auf deren Nothwendigkeit *Poisson* Bulletin de la société philomathique 1812 t. 3 p. 388 durch seinen Zusatz aufmerksam gemacht hat. Vergl. *Poisson* Mém. de Paris 1823 p. 463 und Connaissance des temps pour 1829 (1826 edirt und 1828 von *Gauss* angezeigt W. t. 6 p. 648).

6. Die Function V ist mit einem Namen, potential function, belegt worden von *Green* 1828, dessen Abhandlung jedoch erst nach ihrem durch Herrn *Thomson* veranlassten Wiederabdruck in diesem Journal Bd. 39. 44. 47, 1850—54 bekannter geworden ist und allgemeinere Würdigung gefunden hat. Wenig später hatte *Hamilton* in den Philos. Trans. 1834 der Function U den Namen force function gegeben, welchen *Jacobi* seit 1836 (in diesem Journal Bd. 17 p. 98) beibehalten hat. In ein neues Stadium ist aber die Theorie der Kräfte, mit welchen Agentien wirken, hauptsächlich durch *Gauss* Allgemeine Lehrsätze etc. 1840 gebracht worden, und durch die von *Dirichlet* über dieses Gebiet gehaltenen Vorlesungen. *Gauss* hat den Namen Potential für V und U eingeführt (Art. 3), und in den ersten 18 Artikeln die Arbeiten seiner Vorgänger, soweit es nöthig schien, zusammengestellt und präcisirt. Vor dem 19. Artikel ist zu lesen: „Die bisher vorgetragenen Sätze sind zwar ihrem wesentlichen Inhalte nach nicht neu, durften aber des Zusammenhangs wegen als nothwendige Vorbereitungen zu den nachfolgenden Untersuchungen nicht übergangen werden, in welchen eine Reihe neuer Lehrsätze entwickelt werden wird."

Giessen, 1878, August.

Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen.

(Von den Herren *Frobenius* und *Stickelberger* in Zürich.)

Die Theorie der endlichen Gruppen von vertauschbaren Elementen haben einerseits *Euler* und *Gauss*, andererseits *Lagrange* und *Abel* begründet, jene in ihren zahlentheoretischen Untersuchungen über Potenzreste, diese in ihren algebraischen Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen. Nach diesen grundlegenden Untersuchungen haben *Gauss* und Herr *Schering* die Theorie weiter entwickelt. *Gauss* (*Démonstration de quelques théorèmes concernant les périodes des classes des formes binaires du second degré, Werke*, Bd. II, S. 266) lehrt die Zerlegung einer Gruppe in primäre Gruppen, deren Ordnungen relative Primzahlen sind (§. 4), Herr *Schering* (*Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttinger Abhandlungen, Bd.* 14.) ihre Zerlegung in elementare Gruppen, von deren Ordnungen jede durch die folgende theilbar ist (§. 6). Jene Zerlegung ist eine völlig bestimmte, diese aber kann auf verschiedene Weisen ausgeführt werden. Diese Bemerkung bildete den Ausgangspunkt unserer Untersuchung, indem sie uns zu der Frage führte, ob es gewisse allen diesen Zerlegungen gemeinsame Eigenschaften gäbe. Wir erkannten zunächst, dass die Ordnungen der elementaren Gruppen, in die Herr *Schering* die ganze Gruppe zerlegt, constante von der Wahl der partialen Gruppen unabhängige Zahlen sind. Indem wir dann durch Combination der *Gauss*schen Zerlegung mit der *Schering*schen zu den unzerlegbaren Bestandtheilen der Gruppe vordrangen, gelang es uns weiter, mit Hülfe einer schärferen Fassung des Begriffs der primitiven Wurzeln (§. 3) festzustellen, wie weit die irreductibeln Factoren einer Gruppe von einander unabhängig und wie weit sie abhängig sind.

Die Hauptschwierigkeit bei dieser Untersuchung bestand, ähnlich wie bei der Lehre von den complexen ganzen Zahlen, in der Umformung der Begriffe, welche die elementare Zahlentheorie darbietet. Während man z. B. dort eine Zahl eine Primzahl nennt, wenn sie nur durch 1 und sich selbst theilbar ist, mussten wir hier eine Gruppe irreductibel nennen, wenn sie nicht in zwei Factoren zerfällt werden kann, ohne dass einer derselben gleich der ganzen Gruppe ist (§. 8). Während man dort unter einer primitiven Wurzel der Congruenz $x^n \equiv 1$ eine Zahl versteht, von der keine niedrigere Potenz, als die $n$te, congruent 1 ist, wurden wir hier darauf geführt, nur dann eine Wurzel jener Congruenz primitiv zu nennen, wenn keine niedrigere Potenz derselben, als die $n$te, ein $n$ter Potenzrest ist.

Nachdem wir das in §. 1 entwickelte Problem in den §§. 2—9 erledigt haben, ohne von der Zahlentheorie mehr als ihre ersten Elemente zu benutzen, führen wir in §. 10 die ganze Lehre von den Gruppen auf die Theorie der linearen Formen mit ganzen Cofficienten (*Moduln* im Sinne des Herrn *Dedekind*) zurück. Um die abstracte Entwicklung möglichst bequem und fasslich darstellen zu können, knüpfen wir sie an die Untersuchung der Klassen von Zahlen an, die in Bezug auf einen gegebenen Modul incongruent und relativ prim zu demselben sind, ohne dabei von den speciellen Eigenschaften dieser Elemente Gebrauch zu machen. Die Theorie dieser Zahlenklassen haben wir dann in den §§. 11 und 12 als Anwendung der allgemeinen Untersuchung kurz abgehandelt.

§. 1. Definitionen.

Die Elemente unserer Untersuchung sind die $\varphi(M)$ Klassen von (reellen) ganzen Zahlen, welche in Bezug auf einen Modul M incongruent und relativ prim zu demselben sind. Zwei Elemente heissen gleich, $A=B$, wenn sie durch (mod. M) congruente Zahlen repräsentirt werden. Eine Anzahl dieser Elemente bildet eine (endliche)*) Gruppe, wenn das Product von je zweien derselben wieder unter ihnen enthalten ist. Z. B. bildet

*) Es giebt auch Gruppen von unzählig vielen Elementen, z. B. bilden die Einheiten eines algebraischen Körpers, falls sie nicht sämmtlich Wurzeln aus 1 sind, eine unendliche Gruppe von endlichem Range.

die Gesammtheit der $\varphi(M)$ Zahlen eine endliche Gruppe*). Das Element E (so bezeichnen wir im folgenden die Zahlenklasse, deren Repräsentant 1 ist) heisst das *Hauptelement.* Es bildet für sich eine Gruppe, welche wir mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen und die *Hauptgruppe* nennen werden. Die Anzahl der verschiedenen Elemente, aus denen eine Gruppe besteht, heisst die *Ordnung* der Gruppe. Eine Gruppe heisst *primär*, wenn ihre Ordnung eine Potenz einer Primzahl ist.

Ist A ein Element einer Gruppe, so gehören auch alle Potenzen von A der Gruppe an. Dieselben können, da jede Gruppe nur eine endliche Anzahl von Elementen enthält, nicht alle von einander verschieden sein. Ist $A^s = A^{s+t}$, so ist $A^t = E$. Der Exponent der niedrigsten Potenz von A, welche gleich E ist, heisst der Exponent, zu welchem A *gehört.* Ist derselbe gleich e, und setzt man $A^{-1} = A^{e-1}$, so ist $AA^{-1} = E\ (= A^0)$. Ist ferner $A^t = E$, so muss t durch e theilbar sein. Denn ist $t = ef + g$ und $0 \leqq g < e$, so ist $E = (A^e)^f A^g = A^g$ und folglich $g = 0$. Damit also $A^r = A^s$ sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $r \equiv s$ (mod. e) ist. Folglich ist die Zahl e die Ordnung der Gruppe, die von den Potenzen von A gebildet wird, und wird daher auch die *Ordnung des Elementes* A genannt. (*Cauchy, Mémoire sur les arrangements etc. p.* 157, *Exerc. d'analyse et de phys. math. tom. III.*)

Sind $A, B, C, \ldots$ mehrere Elemente einer Gruppe, so gehören auch alle Elemente von der Form $A^x B^y C^z \ldots$ der Gruppe an. Mehrere Elemente einer Gruppe bilden eine *Basis* derselben, wenn sich aus ihnen durch Potenziren und Multipliciren alle Elemente der Gruppe zusammensetzen lassen. Besitzt eine Gruppe eine Basis von r Elementen und keine Basis von weniger als r Elementen, so heisst r der *Rang* der Gruppe. Eine Gruppe heisst *elementar*, wenn sie vom ersten Range ist, wenn sich also alle ihre Elemente als Potenzen von einem derselben darstellen lassen. Ein solches Element heisst ein *primitives Element* der Gruppe.

Zwei Gruppen heissen gleich, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, wenn sie dieselben Elemente

*) Es giebt auch Systeme von unzählig vielen Elementen, aus denen sich endliche Gruppen bilden lassen, z. B. die Einheitswurzeln aller Grade.

enthalten. — Multiplicirt man jedes Element einer Gruppe $\mathfrak{A}$ mit jedem Elemente einer andern Gruppe $\mathfrak{B}$, so bilden die Producte, soweit sie verschieden sind, wieder eine Gruppe, welche das *Product* der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heisst und mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ $(=\mathfrak{B}\mathfrak{A})$ bezeichnet wird. Multiplicirt man jedes Element von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit jedem Elemente der Gruppe $\mathfrak{C}$, so bilden die Producte eine Gruppe $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}=\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})=\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ heissen die *Factoren* des Productes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Offenbar ist $\mathfrak{A}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$.

Wenn alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{B}$ auch der Gruppe $\mathfrak{A}$ angehören, so heisst $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ *theilbar*, oder $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ *enthalten*, oder $\mathfrak{B}$ ein *Divisor* von $\mathfrak{A}$. Jede Gruppe ist durch die Hauptgruppe $\mathfrak{E}$ theilbar. Da die Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ das Product aus jedem Elemente von $\mathfrak{A}$ in das Hauptelement E von $\mathfrak{B}$ enthält, so ist $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{A}$ theilbar. Ist umgekehrt $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{A}$ theilbar, so kann man, und zwar in der Regel auf verschiedene Weisen, eine Gruppe $\mathfrak{B}$ bestimmen, welche der Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ genügt. Offenbar erfüllt nämlich $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ diese Bedingung, weil $\mathfrak{A}\mathfrak{C}=\mathfrak{C}$ ist, falls $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}$ aufgeht.

Alle Elemente, welche zwei oder mehrere Gruppen gemeinsam haben, bilden eine Gruppe, welche der *grösste gemeinsame Divisor* jener Gruppen heisst. Zwei Gruppen, deren grösster gemeinsamer Divisor die Hauptgruppe ist, heissen *theilerfremd*. Ist A ein Element von $\mathfrak{A}$, und B ein Element von $\mathfrak{B}$, und sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ theilerfremd, so kann die Gleichung $AB=E$ nur bestehen, wenn $A=B=E$ ist, da $A=B^{-1}$ sowohl der Gruppe $\mathfrak{A}$ als auch der Gruppe $\mathfrak{B}$ angehört. Mehrere Gruppen heissen theilerfremd*), wenn das Product aus einem Elemente der ersten, einem der zweiten, einem der dritten, u. s. w., nicht gleich dem Hauptelemente sein kann, ohne dass jeder Factor für sich demselben gleich ist. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ theilerfremd, so sind auch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ theilerfremd. Mehrere Elemente $A, B, C, \ldots$ heissen *unabhängig*, wenn die elementaren Gruppen, deren Basen sie bilden, theilerfremd sind, wenn also die Gleichung $A^x B^y C^z \ldots = E$ nur bestehen kann, falls $A^x = B^y = C^z = \cdots = E$ ist.

---

*) Ist eine Gruppe zu zwei andern theilerfremd, so braucht sie zu ihrem Producte nicht theilerfremd zu sein. Ist z. B. der Modul $M=8$, und besteht die Gruppe $\mathfrak{A}$ aus den Elementen 1, 3, $\mathfrak{B}$ aus 1, 5, $\mathfrak{C}$ aus 1, 7, so sind je zwei dieser Gruppen theilerfremd, während jede in dem Producte der beiden andern aufgeht.

Eine Gruppe $\mathfrak{H}$ heisst in die Factoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ *zerlegbar*, wenn $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \ldots$ ist und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ theilerfremd sind. Kann eine Gruppe nicht in zwei (theilerfremde) Factoren zerlegt werden, so heisst sie *unzerlegbar* oder *irreductibel*. Durch eine endliche Anzahl von Versuchen kann man entweder eine Zerlegung einer gegebenen Gruppe finden, oder sich von ihrer Irreductibilität überzeugen: Man ermittle zunächst alle Divisoren der Gruppe, indem man aus ihren Elementen alle möglichen Combinationen bildet, und aus denselben alle die ausscheidet, welche keine Gruppe bilden. Je zwei dieser Divisoren, die ausser E kein Element gemeinsam haben, multiplicire man mit einander, und sehe zu, ob eins dieser Producte gleich der ganzen Gruppe ist. Erhält man auf diese Weise eine Zerlegung der gegebenen Gruppe in zwei Factoren, so kann man jeden derselben in der nämlichen Art auf seine Zerlegbarkeit untersuchen. Ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zerlegbar, und ist keiner der beiden Factoren gleich $\mathfrak{H}$, so muss $\mathfrak{A}$ sowohl wie $\mathfrak{B}$ weniger Elemente als $\mathfrak{H}$ enthalten. Mithin muss man auf dem angegebenen Wege durch eine endliche Anzahl von Operationen zu einer Zerlegung der gegebenen Gruppe in lauter irreductible Factoren gelangen.

I. *Eine Gruppe, die nicht irreductibel ist, kann in lauter irreductible Factoren zerlegt werden.*

Eine solche Zerlegung ist in der Regel auf viele verschiedene Weisen möglich. Wie man sie aber auch ausführen mag, man erhält doch stets die gleiche Anzahl von irreductibeln Factoren, und dieselben können einander in zwei verschiedenen Zerlegungen so zugeordnet werden, dass die entsprechenden Factoren von gleicher Ordnung sind. Der Beweis dieser Behauptung (§. 8), sowie die genaue Charakterisirung der irreductibeln Factoren einer zerlegbaren Gruppe (§. 9) bildet den Hauptgegenstand der folgenden Untersuchung.

Die obigen Definitionen und alle folgenden Entwicklungen bleiben auch richtig, wenn der Begriff der Gleichheit zweier Elemente etwas weiter gefasst wird, als bisher geschehen ist (vgl. *Kronecker*, *Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen, Berliner Monatsberichte* 1870, p. 881). Ist nämlich $\mathfrak{M}$ eine bestimmte Gruppe, so wollen wir zwei Elemente in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{M}$ einander gleich

nennen, $A = B$, wenn AB^{-1} in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Alle Elemente von $\mathfrak{M}$ selber sind dann gleich E. Daher heisst $\mathfrak{M}$ die Hauptgruppe, weil sie bei dieser Bedeutung des Gleichheitsbegriffes die nämliche Rolle spielt, wie bei der engeren Bedeutung desselben die Gruppe $\mathfrak{E}$. Sind die Elemente A und B der Gruppe $\mathfrak{H}$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$ einander gleich, so ist AB^{-1} sowohl in $\mathfrak{H}$ als auch in $\mathfrak{M}$ enthalten, also auch in dem grössten gemeinsamen Divisor von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}$. Bei der Betrachtung der relativen Gleichheit der Elemente einer Gruppe $\mathfrak{H}$ in Bezug auf eine Gruppe $\mathfrak{M}$ kann man sich daher auf den Fall beschränken, wo $\mathfrak{M}$ ein Divisor von $\mathfrak{H}$ ist. Die Elemente einer Gruppe $\mathfrak{H}$ kann man also in Bezug auf jeden Divisor $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ in *Geschlechter* eintheilen, indem man zwei Elemente zu demselben Geschlechte rechnet oder nicht, je nachdem sie in Bezug auf $\mathfrak{M}$ gleich oder verschieden sind. Unter diesen Geschlechtern bildet nur ein einziges eine Gruppe, nämlich das der Elemente von $\mathfrak{M}$, welches das *Hauptgeschlecht* heisst.

Bestehen in Bezug auf $\mathfrak{M}$ die Gleichungen $A = B$ und $C = D$, so ist auch $AC = BD$, und aus den Gleichungen $AC = BD$ und $A = B$ ergiebt sich umgekehrt $C = D$. Ist daher $A = B$, so ist auch $A^n = B^n$. Der Exponent der niedrigsten Potenz von A, welche ein Element von $\mathfrak{M}$ ist, heisst der Exponent, zu dem A in Bezug auf $\mathfrak{M}$ gehört. Ist $A = B$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$, so gehören A und B in Bezug auf $\mathfrak{M}$ zu demselben Exponenten. Gehört A in Bezug auf $\mathfrak{M}$ zum Exponenten e, so ist der Exponent jeder Potenz von A, die in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, ein Vielfaches von e. Gehört ein Element H in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{A}$ zum Exponenten a und in Bezug auf $\mathfrak{B}$ zu b, und ist $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ theilbar, so ist b durch a theilbar. Denn H^b ist ein Element von $\mathfrak{B}$, also auch von $\mathfrak{A}$, und folglich geht a in b auf. Gehört daher H in Bezug auf $\mathfrak{A}$ zum Exponenten a, so geht a in der Ordnung von H auf.

Der Bequemlichkeit der Darstellung halber werden wir im folgenden die Beweise nur für die engere Bedeutung des Gleichheitsbegriffes führen, dagegen die hauptsächlichsten Sätze auch auf die weitere Bedeutung desselben übertragen.

§. 2. Die Ordnung einer Gruppe.

Seien $a, b, c \dots$ die Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$, und sei h die Ordnung ihres Productes $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \dots$. Multiplicirt man jedes der a Elemente von $\mathfrak{A}$ mit jedem der b Elemente von $\mathfrak{B}$ und die Producte mit jedem der c Elemente von $\mathfrak{C}$ u. s. w., so erhält man $abc \dots$ Elemente. Findet sich unter diesen Producten ein Element mehrmals, so kommt auch jedes andere gleich oft unter ihnen vor. Denn sind A, A_1, A_2 [B, B_1, B_2; $C, C_1, C_2; \dots$] Elemente von $\mathfrak{A}$ [$\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$], zwischen welchen die Gleichungen

$$A_1^{-1} A_2 = A, \quad B_1^{-1} B_2 = B, \dots \quad \text{oder} \quad A_2 = A_1 A, \quad B_2 = B_1 B, \dots$$

bestehen, so folgt aus der Gleichung $A_1 B_1 C_1 \dots = A_2 B_2 C_2 \dots$ die Gleichung $ABC \dots = E$, und umgekehrt aus der letzteren Gleichung die erstere. Sind daher g unter jenen Producten gleich E, so kommt auch jedes Element von $\mathfrak{H}$ g mal unter ihnen vor. Mithin ist die Anzahl der wirklich verschiedenen Producte $h = \frac{abc\dots}{g}$, oder es ist

$$abc \dots = gh.$$

I. *Die Ordnung des Productes mehrerer Gruppen geht in dem Producte aus den Ordnungen der einzelnen Factoren auf.*

Sind die Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$ theilerfremd, so kann die Gleichung $ABC \dots = E$ nur bestehen, wenn $A = B = C \dots = E$ ist, und mithin ist $g = 1$. Sind die Gruppen nicht theilerfremd, so ist $g > 1$. Daraus folgt (vgl. *Cauchy*, l. c. p. 229):

I[a]. *Wenn eine Gruppe in mehrere Factoren zerlegbar ist, so ist ihre Ordnung gleich dem Producte der Ordnungen der einzelnen Factoren; und wenn die Ordnung eines Productes gleich dem Producte der Ordnungen der Factoren ist, so sind die Factoren theilerfremd.*

Ist $\mathfrak{A}$ [$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$] die Gruppe der Potenzen von A [$B, C, \dots$], und ist $A^a = E$ [$B^b = E, C^c = E \dots$], so ist die Ordnung von $\mathfrak{A}$ gleich der Ordnung von A, also ein Divisor von a. Daraus folgt:

I[b]. *Genügen die Elemente $A, B, C \dots$ der Basis einer Gruppe den*

Gleichungen $A^a = E$, $B^b = E$, $C^c = E \ldots$, *so ist die Ordnung* h *der Gruppe ein Divisor von* $abc\ldots$.

Ist daher p eine Primzahl, welche in der Ordnung h der Gruppe aufgeht, so muss eine der Zahlen $a, b, c \ldots$ durch p theilbar sein. Sind speciell $a, b, c \ldots$ die Exponenten, zu welchen $A, B, C \ldots$ gehören, und ist a durch p theilbar, so gehört $A^{\frac{a}{p}}$ zum Exponenten p. Daraus ergiebt sich der Satz (*Cauchy*, l. c. p. 250):

I^c. *In einer Gruppe, deren Ordnung durch die Primzahl* p *theilbar ist, giebt es Elemente, welche zum Exponenten* p *gehören.*

Aus dem Satze I^b. ergeben sich ferner die Folgerungen:

I^d. *Die Ordnung einer Gruppe* r*ten Ranges, deren Elemente sämmtlich der Gleichung* $X^k = E$ *genügen, ist ein Divisor von* k^r.

I^e. *Die Ordnung einer Gruppe, deren Elemente sämmtlich der Gleichung* $X^k = E$ *genügen, ist durch keine Primzahl theilbar, die nicht in* k *aufgeht.*

Die kleinste Zahl k, welche die Eigenschaft hat, dass alle Elemente einer Gruppe die Gleichung $X^k = E$ befriedigen, heisst die **erste Invariante** dieser Gruppe.

I^f. *Die Ordnung einer Gruppe ist durch keine Primzahl theilbar, die nicht in der ersten Invariante der Gruppe aufgeht.*

Sind $A_1, A_2, \ldots A_a$ die Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}$, ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{A}$ theilbar, und sind $B_1, B_2 \ldots B_b$ die sämmtlichen in Bezug auf $\mathfrak{A}$ verschiedenen Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$, so sind die Producte $A_\alpha B_\beta$ $(\alpha = 1, 2 \ldots a;\ \beta = 1, 2 \ldots b)$ alle (absolut) von einander verschieden und bilden die sämmtlichen Elemente von $\mathfrak{G}$. Denn wäre $A_\alpha B_\beta = A_\gamma B_\delta$, so wäre $B_\beta B_\delta^{-1} = A_\alpha^{-1} A_\gamma = A_\varepsilon$, es wären also B_β und B_δ in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{A}$ einander gleich. Wäre ferner ein Element B der Gruppe $\mathfrak{G}$ keinem der Producte $A_\alpha B_\beta$ gleich, so wäre B keinem der Elemente B_β in Bezug auf $\mathfrak{A}$ gleich; es wären also $B_1, B_2 \ldots B_b$ nicht die sämmtlichen in Bezug auf $\mathfrak{A}$ verschiedenen Elemente von $\mathfrak{G}$. Mithin ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gleich ab. Daraus ergiebt sich der Satz von *Lagrange* (*Réflexions sur la résolution algébrique des équations, No. 99. Oeuvres publiées par Serret, t. III.*):

II. *Die Ordnung einer Gruppe ist durch die Ordnung jedes ihrer Divisoren theilbar.*

II[a]. *Jeder Divisor einer primären Gruppe ist wieder eine primäre Gruppe.*

Gehört das Element A der Gruppe $\mathfrak{H}$ zum Exponenten e, so ist die Gruppe der Potenzen von A ein Divisor von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung gleich e ist.

II[b]. *Die Ordnung einer Gruppe ist durch die Ordnung jedes ihrer Elemente theilbar.*

Mehrere Zahlen heissen im Folgenden nur dann relativ prim, wenn je zwei derselben keinen gemeinsamen Theiler haben. Sind die Ordnungen $a, b, c \dots$ der Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$ relative Primzahlen, so ist die Ordnung h ihres Productes durch jede der Zahlen $a, b, c \dots$, also auch durch ihr Product theilbar, und mithin ist $h = abc \dots$, da h nicht grösser als das Product sein kann. Nach Satz I[a] sind daher die Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$ theilerfremd.

III. *Sind die Ordnungen mehrerer Gruppen theilerfremd, so sind die Gruppen theilerfremd.*

Für zwei Gruppen ergiebt sich der Satz auch daraus, dass die Ordnung eines gemeinsamen Divisors zweier Gruppen ein gemeinsamer Divisor der Ordnungen der beiden Gruppen sein muss.

§. 3. Potenzen und primitive Wurzeln.

1. Alle Elemente einer Gruppe $\mathfrak{H}$, welche der Gleichung $X^k = E$ genügen, bilden eine Gruppe $\mathfrak{K}$, die ein Divisor von $\mathfrak{H}$ ist, und deren Ordnung wir mit $|k, \mathfrak{H}|$ bezeichnen. Aus Satz I[e], §. 2 ergiebt sich:

I. *Die Zahl* $|k, \mathfrak{H}|$ *ist durch keine Primzahl theilbar, die nicht in* k *aufgeht.*

Mithin ist $|p^\pi, \mathfrak{H}|$ eine Potenz der Primzahl p, wie auf einem ganz anderen Wege *Gauss* (Werke, Bd. II, S. 266) bewiesen hat. — Ist a durch b theilbar, so genügen alle Wurzeln der Gleichung $X^b = E$ auch der Gleichung $X^a = E$. Daher ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ der Wurzeln der Gleichung

$X^a = E$ durch die Gruppe $\mathfrak{B}$ der Wurzeln der Gleichung $X^b = E$ theilbar. Aus Satz II, §.2 ergiebt sich mithin:

II. *Ist a durch b theilbar, so ist auch $|a, \mathfrak{H}|$ durch $|b, \mathfrak{H}|$ theilbar.*

Ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots$ zerlegbar, so ist jedes Element H von $\mathfrak{H}$ das Product aus einem Elemente A von $\mathfrak{A}$, einem Elemente B von $\mathfrak{B}$, u. s. w., $H = ABC\cdots$. Ist nun $E = H^k = A^k B^k C^k \dots$, so muss $E = A^k = B^k = C^k = \cdots$ sein, weil die Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\dots$ als theilerfremd vorausgesetzt sind.

III. *Ist die Gruppe $\mathfrak{H}$ in die Factoren $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots$ zerlegbar, so kann eine Wurzel der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$ stets und nur auf eine Weise als Product einer Wurzel dieser Gleichung in der Gruppe $\mathfrak{A}$, einer Wurzel derselben in der Gruppe $\mathfrak{B}$ etc. dargestellt werden, und es ist*

$$|k, \mathfrak{H}| = |k, \mathfrak{A}|\ |k, \mathfrak{B}|\ |k, \mathfrak{C}| \cdots.$$

Ist k gleich dem Producte der relativen Primzahlen $abc\dots$, und ist $\mathfrak{A}$ $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots]$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{H}$, welche der Gleichung $X^a = E\,[X^b = E,\ X^c = E, \dots]$ genügen, so sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ theilerfremd. Denn ist $ABC\dots = E$, wo $A\,[B, C, \dots]$ ein Element von $\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots]$ ist, so ist $E = (ABC\dots)^{\frac{k}{a}} = A^{\frac{k}{a}}$ und mithin auch $(A^a)^x (A^{\frac{k}{a}})^y = E$, also wenn man x und y so bestimmt, dass $ax + \frac{k}{a} y = 1$ wird, $A = E$, und ebenso $B = C = \cdots = E$. (Dies Resultat kann auch aus dem Satze I in Verbindung mit dem Satze III, §.2 abgeleitet werden.) Das Product $ABC\dots = H$ befriedigt die Gleichung $X^k = E$. Ist umgekehrt H irgend ein Element von $\mathfrak{H}$, das dieser Gleichung genügt, ist, in Partialbrüche zerlegt, $\frac{1}{k} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \cdots$, und setzt man $H^{\frac{kx}{a}} = A$, $H^{\frac{ky}{b}} = B, \dots$, so ist $A^a = E$, $B^b = E, \dots$ und $ABC\dots = H$. Daher ist die Gruppe $\mathfrak{K}$, welche von den Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}$ gebildet wird, die der Gleichung $X^k = E$ genügen, in die Gruppen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots$ zerlegbar.

IV. *Ist die Zahl k gleich dem Producte der relativen Primzahlen $abc\dots$, so kann eine Wurzel der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$ stets und nur*

auf eine Weise als Product einer Wurzel der Gleichung $X^a = E$, einer Wurzel der Gleichung $X^b = E$, etc. dargestellt werden, und es ist

$$|k, \mathfrak{H}| = |a, \mathfrak{H}|\ |b, \mathfrak{H}|\ |c, \mathfrak{H}| \cdots.$$

2. Ein Element A von $\mathfrak{H}$ heisst eine $k$te Potenz in der Gruppe $\mathfrak{H}$, wenn es in $\mathfrak{H}$ ein Element U giebt, das der Gleichung $U^k = A$ genügt. Alle $k$ten Potenzen in $\mathfrak{H}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{K}$, die ein Divisor von $\mathfrak{H}$ ist, und deren Ordnung wir mit $(k, \mathfrak{H})$ bezeichnen. Ist $U^k = A$ und $V^k = A$, und ist $U^{-1} V = W$, also $V = UW$, so ist $W^k = E$. Sind daher W_1, $W_2, \ldots W_i$ alle Elemente von $\mathfrak{H}$, die der Gleichung $X^k = E$ genügen, und ist U eine Wurzel der Gleichung $U^k = A$, so sind UW_1, $UW_2, \ldots$ UW_i die sämmtlichen verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung. Erhebt man alle h Elemente der Gruppe $\mathfrak{H}$ auf die $k$te Potenz, so sind demnach je i dieser $k$ten Potenzen einander gleich, und mithin giebt es $\frac{h}{i}$ verschiedene $k$te Potenzen in der Gruppe $\mathfrak{H}$ *).

V. *Das Product aus der Anzahl der $k$ten Potenzen in einer Gruppe und der Anzahl der Elemente, deren $k$te Potenzen gleich dem Hauptelemente sind, ist gleich der Ordnung der Gruppe*:

$$|k, \mathfrak{H}|\ (k, \mathfrak{H}) = h.$$

Ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zerlegbar, so kann jedes Element $W[C]$ von $\mathfrak{H}$ und zwar nur auf eine Weise als Product eines Elementes $U[A]$ von $\mathfrak{A}$ und eines Elementes $V[B]$ von $\mathfrak{B}$ dargestellt werden. Ist nun $C = W^k$, so ist $AB = U^k V^k$ und folglich gehört das Element $U^{-k} A = V^k B^{-1}$ sowohl der Gruppe $\mathfrak{A}$ als auch der Gruppe $\mathfrak{B}$ an, ist also, weil dieselben theilerfremd sind, gleich E, und mithin ist $A = U^k$ und $B = V^k$.

---

*) Sind die Elemente von $\mathfrak{H}$ Klassen äquivalenter binärer quadratischer Formen derselben Determinante, so nennt *Gauss* die Gruppe der zweiten Potenzen (d. h. der durch Duplication entstehenden Klassen) das Hauptgeschlecht und rechnet zwei Elemente zu demselben Geschlechte oder nicht, je nachdem sie in Bezug auf das Hauptgeschlecht gleich oder verschieden sind (vgl. §. 1). Nach dem Beweise des Satzes II, §. 2 enthält jedes Geschlecht gleich viele Klassen, und daher ist die Anzahl der Geschlechter gleich dem Quotienten der Anzahl h sämmtlicher Klassen durch die Anzahl $(2, \mathfrak{H})$ der Klassen des Hauptgeschlechts. Die Elemente von $\mathfrak{H}$, welche der Gleichung $X^2 = E$ genügen, heissen die ambigen Klassen. Nach dem obigen Satze V ist folglich die Anzahl der Geschlechter der Anzahl der ambigen Klassen gleich (vgl. *Disqu. arithm.* 258, 261, 287).

VI. *Jede $k$te Potenz in dem Producte mehrerer theilerfremden Gruppen ist das Product aus lauter $k$ten Potenzen in den einzelnen Factoren.*

VI^a. *Sind zwei Gruppen theilerfremd, so ist ein Element der ersten, das eine $k$te Potenz in dem Producte der beiden Gruppen ist, auch eine $k$te Potenz in der ersten Gruppe.*

3. Ein Element der Gruppe $\mathfrak{H}$, welches der Gleichung $X^k = E$ genügt, heisst eine *primitive Wurzel* dieser Gleichung *in der Gruppe* $\mathfrak{H}$, wenn es in Bezug auf die Gruppe, die aus den $k$ten Potenzen in $\mathfrak{H}$ besteht, zum Exponenten k gehört. Demnach darf keine niedrigere Potenz eines solchen Elementes als die $k$te (die gleich E ist) gleich einer $k$ten Potenz in $\mathfrak{H}$ sein, und die Gleichung $A^x = U^k$ nur dann durch ein Element U von $\mathfrak{H}$ befriedigt werden, wenn x durch k theilbar ist.

VII. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ theilerfremd, so ist ein Element von $\mathfrak{A}$, das eine primitive Wurzel der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist, auch eine primitive Wurzel dieser Gleichung in der Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.*

Denn ist $A^t = W^k$, wo A der Gruppe $\mathfrak{A}$ und W der Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ angehört, so ist nach Satz VI^a auch $A^t = U^k$, wo U ein Element von $\mathfrak{A}$ ist, und mithin ist, wenn A eine primitive Wurzel der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist, t durch k theilbar.

VIII. *Ist k das Product der relativen Primzahlen $a\,b\,c\ldots$, so erhält man jede primitive Wurzel der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$, indem man jede primitive Wurzel der Gleichung $X^a = E$ mit jeder der Gleichung $X^b = E$, die Producte mit jeder der Gleichung $X^c = E$ etc. multiplicirt.*

Denn seien $A, B, C, \ldots$ primitive Wurzeln der Gleichungen $X^a = E$, $X^b = E$, $X^c = E, \ldots$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$ und sei $H = ABC\ldots$. Ist dann $H^t = U^k$, wo U ein Element von $\mathfrak{H}$ ist, so ist $H^{\frac{tk}{a}} = (ABC\ldots)^{\frac{tk}{a}} = A^{\frac{tk}{a}} = \left(U^{\frac{k^2}{a^2}}\right)^a$. Folglich ist $t\frac{k}{a}$ durch a, also t durch a theilbar. Ebenso ist t durch $b, c, \ldots$ theilbar, also auch durch $abc\ldots = k$, und mithin ist H eine primitive Wurzel der Gleichung $X^k = E$. Ferner kann jede Wurzel H der Gleichung $X^k = E$, und zwar nur auf eine Weise, als ein Product $ABC\ldots$ je einer Wurzel der Gleichungen $X^a = E$, $X^b = E$, $X^c = E, \ldots$

dargestellt werden. Ist nun H eine primitive Wurzel der Gleichung $X^k = E$, so ist auch A eine primitive Wurzel der Gleichung $X^a = E$. Denn ist $A^x = U^a$, so ist $H^{\frac{xk}{a}} = (ABC\dots)^{\frac{xk}{a}} = A^{\frac{xk}{a}} = U^k$. Folglich ist $\frac{xk}{a}$ durch k, also x durch a theilbar.

Mehrere primitive Wurzeln $A, B, C, \dots$ der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$ heissen von einander *unabhängig*, wenn die Gruppe der Potenzen von A, die der Potenzen von B, u. s. w., und die Gruppe der $k$ten Potenzen in $\mathfrak{H}$ theilerfremd sind. Demnach kann die Gleichung $A^x B^y C^z \dots = U^k$ nur dann durch ein Element U der Gruppe $\mathfrak{H}$ befriedigt werden, wenn $x, y, z, \dots$ sämmtlich durch k theilbar, also die Factoren der linken Seite einzeln gleich E sind. Die Methode, mittelst deren wir soeben den Satz VIII bewiesen haben, führt, auf Systeme unabhängiger primitiver Wurzeln angewendet, zu dem Resultate: Sind $A_1, A_2, \dots A_\varkappa$ $[B_1, B_2, \dots B_\varkappa;\ C_1, C_2, \dots C_\varkappa;\ \dots]$ $\varkappa$ unabhängige primitive Wurzeln der Gleichung $X^a = E$ $[X^b = E, X^c = E, \dots]$, und sind $a, b, c, \dots$ relative Primzahlen, so sind $A_1 B_1 C_1 \dots = H_1$, $A_2 B_2 C_2 \dots = H_2, \dots, A_\varkappa B_\varkappa C_\varkappa \dots = H_\varkappa$ $\varkappa$ unabhängige primitive Wurzeln der Gleichung $X^{abc\cdots} = E$; sind umgekehrt $H_1, H_2, \dots H_\varkappa$ irgend $\varkappa$ solche Wurzeln, und ist $H_\varrho = A_\varrho B_\varrho C_\varrho \dots$, so sind $A_1, A_2, \dots A_\varkappa$ $\varkappa$ unabhängige primitive Wurzeln der Gleichung $X^a = E$.

Ein System unabhängiger primitiver Wurzeln der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$ heisst *vollständig*, wenn es in $\mathfrak{H}$ keine primitive Wurzel dieser Gleichung giebt, die von ihnen unabhängig ist. Wählt man für A eine beliebige primitive Wurzel der Gleichung $X^k = E$, für B eine beliebige von A unabhängige, für C eine beliebige von A und B unabhängige, u. s. w., so erhält man in der allgemeinsten Weise ein vollständiges System unabhängiger primitiver Wurzeln der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$. Ob jedes solche System aus gleich vielen Elementen besteht oder nicht, bleibt vorläufig dahingestellt (vgl. §. 9, I).

§. 4. Zerlegung einer Gruppe in primäre Factoren.

Sind $A_1, A_2, \dots A_h$ die Elemente einer Gruppe $h$ter Ordnung $\mathfrak{H}$,

so sind auch $A_1 A_\alpha$, $A_2 A_\alpha$, ... $A_h A_\alpha$ die sämmtlichen h verschiedenen Elemente derselben, können sich also nur durch die Anordnung*) von A_1, A_2, ... A_h unterscheiden. Mithin ist $A_1 A_\alpha \dots A_h A_\alpha = A_1 \dots A_h$ und folglich $A_\alpha^h = E$. — Oder: Gehört das Element A der Gruppe $\mathfrak{H}$ zum Exponenten e, so ist nach Satz II^b, §. 2 h durch e theilbar, und mithin folgt aus der Gleichung $A^e = E$ die Gleichung $A^h = E$.

I. *Jedes Element einer Gruppe hter Ordnung genügt der Gleichung* $X^h = E$ (*Fermatscher Satz*).

Daher ist $|h, \mathfrak{H}| = h$. Ist h das Product der relativen Primzahlen ab, so ist nach Satz IV, §. 3 $|a, \mathfrak{H}|\ |b, \mathfrak{H}| = |h, \mathfrak{H}| = h = ab$ und folglich, weil nach Satz I, §. 3 $|a, \mathfrak{H}|$ keine andern Primfactoren wie a, und $|b, \mathfrak{H}|$ keine andern wie b enthält, $|a, \mathfrak{H}| = a$ und $|b, \mathfrak{H}| = b$ (vgl. *Gauss*, Werke, Bd. II, S. 267).

II. *Ist h die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{H}$ und a ein Divisor von h, der zu seinem complementären Divisor relativ prim ist, so ist* $|a, \mathfrak{H}| = a$.

Ist daher h gleich dem Producte der relativen Primzahlen $abc\dots$, so ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ [$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ...] derjenigen Elemente von $\mathfrak{H}$, welche die Gleichung $X^a = E$ [$X^b = E$, $X^c = E$, ...] befriedigen, genau von der Ordnung a [b, c, ...]. Da ferner jede Wurzel der Gleichung $X^h = E$ und zwar nur auf eine Weise als Product je einer Wurzel der Gleichungen $X^a = E$, $X^b = E$, $X^c = E$ ... dargestellt werden kann, so ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots$ zerlegbar. Wird umgekehrt die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $abc\dots$ irgendwie als Product von Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... der Ordnungen a, b, c ... dargestellt, so müssen alle Elemente von $\mathfrak{A}$ nach Satz I der Gleichung $X^a = E$ genügen.

III. *Sind a, b, c, ... relative Primzahlen, so kann eine Gruppe der $abc\dots$ten Ordnung stets und nur auf eine Weise in Factoren der $a$ten, $b$ten, $c$ten, ... Ordnung zerlegt werden.*

---

*) Bezeichnet man die Substitution, welche die Elemente $A_1, \dots A_h$ so unter einander vertauscht, dass sie der Reihe nach gleich $A_1 A_\alpha, \dots A_h A_\alpha$ werden, mit S_α, so ist $S_\alpha S_\beta = S_\beta S_\alpha$, und $S_1 \dots S_h$ bilden eine (transitive) Gruppe $\mathfrak{M}$ von h (vertauschbaren) Substitutionen unter h Buchstaben. Man kann also die Elemente jeder endlichen Gruppe auch als Substitutionen auffassen. (Herr *Camille Jordan* nennt die Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}$ *isomorph. Traité des substitutions*, p. 56; d. J. Bd. 84, S. 101.)

Nimmt man für $a, b, c, \dots$ die Potenzen verschiedener Primzahlen, deren Product h ist, so ergiebt sich daraus der folgende Satz, durch welchen die allgemeine Theorie der Gruppen auf die der primären Gruppen zurückgeführt wird:

IV. *Eine Gruppe kann stets und nur auf eine Weise in lauter primäre Factoren zerlegt werden, deren Ordnungen relative Primzahlen sind.*

§. 5. Der Rang einer Gruppe.

Bilden $A_1, A_2 \dots A_p$ eine Basis der Gruppe $\mathfrak{A}$ vom Range p und $B_1, B_2 \dots B_q$ eine Basis der Gruppe $\mathfrak{B}$ vom Range q, so bilden diese $p+q$ Elemente zusammen eine Basis des Productes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Daher ist der Rang dieser Gruppe $r \overline{\lesseqgtr} p+q$.

I. *Der Rang eines Productes ist nicht grösser als die Summe der Rangzahlen der Factoren.*

Bilden $A_1, A_2 \dots A_n$ eine Basis der Gruppe $\mathfrak{A}$, und durchlaufen $x_1, x_2 \dots x_n$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen, so stellt der Ausdruck $A_1^{x_1} A_2^{x_2} \dots A_n^{x_n}$ alle Elemente der Gruppe dar, und jedes einzelne unendlich oft. Um sämmtliche Darstellungen eines gegebenen Elementes aus einer derselben abzuleiten, muss man alle Lösungen der Gleichung

$$(1.) \qquad A_1^{v_1} A_2^{v_2} \dots A_n^{v_n} = E$$

ermitteln. Sei $\mathfrak{A}_\alpha$ die Gruppe mit der Basis $A_1, A_2 \dots A_{\alpha-1}$ ($\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}$), gehöre A_α in Bezug auf diese Gruppe zum Exponenten $a_{\alpha\alpha}$, und sei

$$(2.) \qquad A_\alpha^{a_{\alpha\alpha}} = A_1^{-a_{\alpha 1}} A_2^{-a_{\alpha 2}} \dots A_{\alpha-1}^{-a_{\alpha,\alpha-1}}.$$

Wenn dann $x_1, x_2 \dots x_n$ unabhängig von einander alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so stellen die linearen Formen

$$(3.) \qquad \begin{cases} v_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{n1} x_n \\ v_2 = \qquad\qquad a_{22} x_2 + \dots + a_{n2} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn} x_n \end{cases}$$

alle Lösungen der Gleichung (1.) dar. Denn gehört ein Element A einer Gruppe $\mathfrak{A}$ (absolut oder in Bezug auf eine gegebene Gruppe $\mathfrak{B}$) zum Ex-

ponenten a, und ist $A^v = E$ (oder A^v in der Gruppe $\mathfrak{B}$ enthalten), so ist v durch a theilbar, $v = ax$. Damit ist, wenn $n = 1$ ist, der obige Satz bereits bewiesen. Zufolge der Gleichung (1.) oder

$$A_n^{v_n} = A_1^{-v_1} A_2^{-v_2} \dots A_{n-1}^{-v_{n-1}}$$

ist $A_n^{v_n}$ in der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ enthalten, und folglich muss v_n durch a_{nn} theilbar sein, $v_n = a_{nn} x_n$. Durch Combination der Gleichung (1.) mit der aus (2.) folgenden Relation

$$A_1^{a_{n1}} A_2^{a_{n2}} \dots A_n^{a_{nn}} = E$$

ergiebt sich ferner

$$A_1^{v_1 - a_{n1} x_n} A_2^{v_2 - a_{n2} x_n} \dots A_{n-1}^{v_{n-1} - a_{n,n-1} x_n} = E.$$

Nehmen wir also an, der Satz sei für eine Basis von $n-1$ Elementen bereits bewiesen, so ergiebt sich daraus seine Richtigkeit für eine Basis von n Elementen. Da ferner die Zahlen $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ alle von Null verschieden sind, mithin die n Linearformen (3.) nicht verschwinden können, ohne dass $x_1, x_2 \dots x_n$ sämmtlich gleich Null sind, so stellen sie jede Lösung der Gleichung (1.) nur ein einziges Mal dar (vgl. *Gauss*, Werke, Bd. II, S. 266).

Bedeutet in der obigen Entwicklung das Gleichheitszeichen nicht absolute Gleichheit, sondern nur relative, in Bezug auf eine gewisse Gruppe $\mathfrak{B}$, so stellt, wenn man (absolut) $A_1^{a_{\alpha 1}} A_2^{a_{\alpha 2}} \dots A_\alpha^{a_{\alpha\alpha}} = B_\alpha$ setzt, der Ausdruck $B_1^{x_1} B_2^{x_2} \dots B_n^{x_n}$ alle Elemente von $\mathfrak{A}$ dar, welche in $\mathfrak{B}$ enthalten sind, also, wenn $\mathfrak{B}$ ein Divisor von $\mathfrak{A}$ ist, alle Elemente von $\mathfrak{B}$, und mithin bilden $B_1, B_2 \dots B_n$ eine Basis der Gruppe $\mathfrak{B}$. Ist folglich n der Rang von $\mathfrak{A}$, so kann der Rang von $\mathfrak{B}$ nicht grösser als n sein.

II. *Der Rang eines Divisors einer Gruppe ist nicht grösser als der Rang der ganzen Gruppe.*

II^a. *Jeder Divisor einer elementaren Gruppe ist wieder eine elementare Gruppe.*

Sind die Ordnungen $a, b, c \dots$ der Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$ relative Primzahlen, so ist die Ordnung ihres Products $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \dots$ gleich $h = abc \dots$. Bilden ferner $A_1, A_2 \dots$ eine Basis von $\mathfrak{A}$, $B_1, B_2 \dots$ eine Basis von $\mathfrak{B}$ u. s. w., so bilden $A_1 B_1 C_1 \dots = H_1$, $A_2 B_2 C_2 \dots = H_2$ eine

Basis von $\mathfrak{H}$. Denn jedes Element H von $\mathfrak{H}$ kann, und zwar nur auf eine Weise, als Product von Elementen

$$A = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \ldots,\quad B = B_1^{b_1} B_2^{b_2} \ldots,\quad C = C_1^{c_1} C_2^{c_2} \ldots, \ldots,$$

die respective den Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ angehören, dargestellt werden. Da alle Elemente der Gruppe $a$ter Ordnung $\mathfrak{A}$ nach Satz I, §. 4 der Gleichung $A^a = E$ genügen, so ist, wenn $x \equiv y \pmod{a}$ ist, auch $A^x = A^y$. Weil nun $a, b, c \ldots$ relative Primzahlen sind, so kann man eine Zahl x_ϱ bestimmen, welche gleichzeitig die Congruenzen

$$x_\varrho \equiv a_\varrho \pmod{a},\quad x_\varrho \equiv b_\varrho \pmod{b},\quad x_\varrho \equiv c_\varrho \pmod{c} \ldots$$

befriedigt. Dann ist

$$A = A_1^{x_1} A_2^{x_2} \ldots,\quad B = B_1^{x_1} B_2^{x_2} \ldots,\quad C = C_1^{x_1} C_2^{x_2} \ldots, \ldots$$

und daher

$$H = ABC \ldots = H_1^{x_1} H_2^{x_2} \ldots.$$

Ist also unter den Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ wenigstens eine vom Range r und keine von höherem Range, so ist der Rang von $\mathfrak{H}$ nicht grösser als r. Nach Satz II ist er aber auch nicht kleiner als r.

III. *Der Rang eines Productes mehrerer Gruppen, deren Ordnungen relative Primzahlen sind, ist gleich dem Range derjenigen Factoren, welche vom höchsten Range sind.*

Sind die Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ relative Primzahlen, gehören $A_1, A_2 \ldots$ der Gruppe $\mathfrak{A}$, $B_1, B_2 \ldots$ der Gruppe $\mathfrak{B}$ an u. s. w., und bilden $H_1 = A_1 B_1 C_1 \ldots$, $H_2 = A_2 B_2 C_2 \ldots$ u. s. w. eine Basis der Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \ldots$, so bilden $A_1, A_2 \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{A}$. Denn ist A irgend ein Element von $\mathfrak{A}$, so ist es auch ein Element von $\mathfrak{H}$, kann also auf die Form $A = H_1^{a_1} H_2^{a_2} \ldots$ gebracht werden. Da ferner a und $\frac{h}{a}$ relative Primzahlen sind, so kann man eine Zahl x bestimmen, welche gleichzeitig die Congruenzen $x \equiv 1 \pmod{a}$, $x \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{h}{a}\right)$ befriedigt. Dann ist

$$A = A^x = H_1^{a_1 x} H_2^{a_2 x} \ldots \equiv A_1^{a_1 x} A_2^{a_2 x} \ldots,$$

weil die $\frac{h}{a}$ten Potenzen von $B_\varrho, C_\varrho \ldots$ sämmtlich gleich E sind. Aus diesen Entwicklungen ergiebt sich die Folgerung:

III^a. *Das Product mehrerer elementaren Gruppen, deren Ordnungen relative Primzahlen sind, ist wieder eine elementare Gruppe. Das Product aus je einem Elemente jeder dieser Gruppen ist stets und nur dann ein primitives Element der Productgruppe, wenn jeder einzelne Factor ein primitives Element seiner Gruppe ist.*

§. 6. Zerlegung einer Gruppe in elementare Gruppen.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache e mehrerer Zahlen $a, b, c\dots$ kann man in Factoren $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zerlegen, die relative Primzahlen sind, und von denen α in a, β in b, γ in $c\dots$ aufgeht (*Gauss,* D. A., 73). Gehören nun $A, B, C\dots$ zu den Exponenten $a, b, c\dots$, so gehören $A^{\frac{a}{\alpha}}, B^{\frac{b}{\beta}}, C^{\frac{c}{\gamma}}\dots$ zu den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma\dots$, und da diese relative Primzahlen sind, so gehört nach Satz III^a, §. 5 $A^{\frac{a}{\alpha}} B^{\frac{b}{\beta}} C^{\frac{c}{\gamma}}\dots$ zu dem Exponenten e.

I. *Ist e das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Exponenten, zu welchen die Basiselemente einer Gruppe gehören, so ist die Ordnung jedes Elementes derselben ein Divisor von e, und es giebt Elemente in der Gruppe, deren Ordnung gleich e ist.*

Daher ist e der grösste unter allen Exponenten, zu welchen Elemente von $\mathfrak{H}$ gehören. Es muss folglich, wenn unter den Ordnungen aller Elemente einer Gruppe e die grösste ist, jede andere in e aufgehen, und mithin muss die $e$te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{H}$ gleich E sein.

Alle diese Sätze gelten auch für die relative Gleichheit der Elemente. Ist unter allen Exponenten, zu welchen die Elemente von $\mathfrak{H}$ in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{A}$ [$\mathfrak{B}$] gehören, a [b] der grösste, und ist $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ theilbar, so ist b durch a theilbar. Denn die $b$te Potenz jedes Elementes H von $\mathfrak{H}$ ist in $\mathfrak{B}$, also auch in $\mathfrak{A}$ enthalten; gehört also H in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{A}$ zum Exponenten a, so muss nach §. 1 a in b aufgehen.

Ist e_1 der grösste der Exponenten, zu welchen die Elemente der Gruppe $h$ter Ordnung $\mathfrak{H}$ gehören, so ist nach Satz II^b, §. 2 die Zahl h

durch e_1 theilbar, und die $e_1$te Potenz jedes Elementes ist gleich E. Gehört das Element H_1 der Gruppe $\mathfrak{H}$ zum Exponenten e_1, und ist $\mathfrak{H}_1$ die Gruppe der Potenzen von H_1, so ist, falls $h = e_1$ ist, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Ist aber $h > e_1$, und ist e_2 der grösste der Exponenten, zu welchen die Elemente von $\mathfrak{H}$ in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ gehören, so ist $e_2 > 1$ und ein Divisor von e_1, und die $e_2$te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{H}$ ist ein Element von $\mathfrak{H}_1$. Ist A ein Element der Gruppe $\mathfrak{H}$, welches in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ zum Exponenten e_2 gehört, und $A^{e_2} = H_1^a$, so ist

$$E = A^{e_1} = H_1^{ae_1 : e_2},$$

folglich ist $ae_1 : e_2$ durch e_1, also a durch e_2 theilbar. Setzt man daher $AH_1^{-a : e_2} = H_2$, so ist $H_2^{e_2} = E$, und da A und H_2 in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ einander gleich sind, so gehört H_2 in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ zu demselben Exponenten e_2 wie A. Die Gleichung $H_1^{x_1} H_2^{x_2} = E$ oder $H_2^{x_2} = H_1^{-x_1}$ kann daher nur dann bestehen, wenn x_2 durch e_2 theilbar, also $H_2^{x_2} = E$, und folglich auch $H_1^{x_1} = E$, also x_1 durch e_1 theilbar ist. Die Gruppe $\mathfrak{H}_2$ der Potenzen von H_2 ist folglich zur Gruppe $\mathfrak{H}_1$ theilerfremd, und mithin ist die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$ gleich $e_1 e_2$. Da dieselbe ein Divisor von $\mathfrak{H}$ ist, so ist h durch $e_1 e_2$ theilbar. Ist $h = e_1 e_2$, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$. Ist aber $h > e_1 e_2$, und ist e_3 der grösste der Exponenten, zu welchen die Elemente von $\mathfrak{H}$ in Bezug auf $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$ gehören, so ist $e_3 > 1$ und ein Divisor von e_2, und die $e_3$te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{H}$ ist ein Element von $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$. Gehört B in Bezug auf $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$ zum Exponenten e_3, und ist $B^{e_3} = H_1^a H_2^b$, so ist

$$H_2^{be_2 : e_3} = B^{e_2} H_1^{-ae_2 : e_3}.$$

Da die $e_2$te Potenz jedes Elementes B der Gruppe $\mathfrak{H}_1$ angehört, so ist daher die $be_2 : e_3$te Potenz von H_2 ein Element von $\mathfrak{H}_1$, und folglich ist, da H_2 in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ zum Exponenten e_2 gehört, $be_2 : e_3$ durch e_2, also b durch e_3 theilbar. Ferner ist

$$E = B^{e_1} = H_1^{ae_1 : e_3} H_2^{be_1 : e_3},$$

und folglich ist $ae_1 : e_3$ durch e_1, also a durch e_3 theilbar. Setzt man daher $BH_1^{-a : e_3} H_2^{-b : e_3} = H_3$, so ist $H_3^{e_3} = E$, und H_3 gehört in Bezug auf $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$ zum Exponenten e_3. Ist $\mathfrak{H}_3$ die Gruppe der Potenzen von H_3, so

sind $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ theilerfremd, und h ist durch die Ordnung $e_1 e_2 e_3$ der Gruppe $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3$ theilbar. Ist $h = e_1 e_2 e_3$, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3$; ist $h > e_1 e_2 e_3$, so setzt man das Verfahren fort. Da die Zahlen $e_1, e_2 \dots e_\varrho$ alle grösser als 1 sind und h durch ihr Product theilbar ist, so muss das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbrechen. Mithin kann $\mathfrak{H}$ in die Factoren $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \dots \mathfrak{H}_r$ zerlegt werden, wo $\mathfrak{H}_\varrho$ eine elementare Gruppe ist. Es kann also jedes Element von $\mathfrak{H}$ auf die Form $H_1^{x_1} H_2^{x_2} \dots H_r^{x_r}$ gebracht werden, wo die Elemente $H_1, H_2 \dots H_r$ von einander unabhängig sind. Gehört H_ϱ zum Exponenten e_ϱ, so ist von den Zahlen $e_1, e_2 \dots e_r$ jede durch die folgende theilbar*).

II. *Jede Gruppe, die nicht elementar ist, kann in Factoren zerlegt werden, die elementare Gruppen sind, und man kann dieselben so wählen und anordnen, dass von ihren Ordnungen jede durch die folgende theilbar ist.*

§. 7. Die Invarianten einer Gruppe.

Ein System $H_1, H_2, \dots H_r$ von Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}$, soll eine *normale Basis* dieser Gruppe heissen, wenn es folgende drei Eigenschaften hat:

1) Jedes Element von $\mathfrak{H}$ kann auf die Form $H_1^{x_1} H_2^{x_2} \dots H_r^{x_r}$ gebracht werden,

2) die Gleichung $H_1^{v_1} H_2^{v_2} \dots H_r^{v_r} = E$ kann nur bestehen, wenn jeder einzelne Factor der linken Seite für sich gleich E ist,

3) gehört H_ϱ zum Exponenten e_ϱ, so ist e_ϱ durch $e_{\varrho+1}$ theilbar, und $e_r > 1$.

Ist dann $H_1^{x_1} \dots H_r^{x_r} = H_1^{y_1} \dots H_r^{y_r}$, so ist $H_1^{x_1 - y_1} \dots H_r^{x_r - y_r} = E$ und daher $x_1 \equiv y_1 \pmod{e_1} \dots x_r \equiv y_r \pmod{e_r}$. Damit also das Element $X = H_1^{x_1} \dots H_r^{x_r}$ die Gleichung $X^k = E$ befriedige, ist nothwendig und hinreichend, dass $k x_\varrho \equiv 0 \pmod{e_\varrho}$ sei ($\varrho = 1, 2, \dots r$). Die Anzahl der

---

*) Die obige Deduction bildet den Hauptinhalt der in der Einleitung citirten Abhandlung des Herrn *Schering* und ist von Herrn *Kronecker* l. c. reproducirt worden. Eine andere Ableitung der obigen Resultate findet man in §. 10.

(mod. e_ϱ) incongruenten Lösungen der Congruenz $k x_\varrho \equiv 0$ (mod. e_ϱ) ist gleich dem grössten gemeinsamen Divisor s_ϱ von k und e_ϱ. Die Anzahl der verschiedenen Elemente von $\mathfrak{H}$, welche der Gleichung $X^k = E$ genügen, ist folglich gleich

$$(1.) \qquad |k, \mathfrak{H}| = s_1 s_2 \dots s_r.$$

Ist k gleich e_r oder ein Divisor von e_r, so ist $s_\varrho = k$ und daher $|k, \mathfrak{H}| = k^r$. Da die Gruppe $\mathfrak{H}$ eine Basis von r Elementen besitzt, so ist wenn mit q der Rang von $\mathfrak{H}$ bezeichnet wird, $q \overline{\underline{<}} r$. Ist ferner p der Rang der Gruppe $\mathfrak{K}$, welche von den Elementen von $\mathfrak{H}$ gebildet wird, die der Gleichung $X^k = E$ genügen, so ist nach Satz II, §. 5 $p \overline{\underline{<}} q \overline{\underline{<}} r$. Die Ordnung $|k, \mathfrak{H}|$ dieser Gruppe ist nach Satz I[d], §. 2 ein Divisor von k^p. Ist nun $k = e_r$, so ist $|k, \mathfrak{H}| = k^r$, demnach k^r ein Divisor von k^p, und daher $r \overline{\underline{<}} p$. Mithin ist $p = q = r$ *). — Ist k kein Divisor von e_r, so ist $s_r < k$ und $s_\varrho \leqq k$ ($\varrho = 1, 2 \dots r-1$) und daher $|k, \mathfrak{H}| < k^r$. Daraus folgt:

I. *Der Rang r einer Gruppe ist dadurch bestimmt, dass es Zahlen $k > 1$ giebt, für welche $|k, \mathfrak{H}| = k^r$ ist, und keine Zahl k, für welche $|k, \mathfrak{H}| > k^r$ ist.*

Daraus ergiebt sich die Folgerung (*Gauss,* D. A., 84):

I[a]. *Damit eine Gruppe elementar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung $X^k = E$ für keinen Werth von k mehr als k Wurzeln in der Gruppe habe.*

Ist $h = a^\alpha$ eine Potenz einer Primzahl a, so ist auch e_r eine Potenz von a, also durch a theilbar.

I[b]. *Der Rang r einer primären Gruppe, deren Ordnung eine Potenz der Primzahl a ist, wird durch die Gleichung $|a, \mathfrak{H}| = a^r$ bestimmt.*

Nach Satz I ist die Zahl r von der Wahl der normalen Basis unabhängig. Dasselbe gilt von der Zahl e_r; denn sie ist die grösste Zahl k, für welche $|k, \mathfrak{H}| = k^r$ ist, und nur wenn k ein Divisor von e_r ist, kann diese Gleichung stattfinden.

Ist k durch e_r theilbar und ein Divisor von e_{r-1}, so ist $s_r = e_r$,

---

*) Dass r der Rang von $\mathfrak{H}$ ist, giebt Herr *Kronecker* (Berl. Mon. Ber. 1877, S. 847) ohne nähere Begründung an.

$s_\varrho = k$ $(\varrho = 1, 2, \dots r-1)$ und daher $|k, \mathfrak{H}| = e_r k^{r-1}$. Ist k nicht durch e_r theilbar, so ist $s_r < e_r$, $s_\varrho \overline{\gtrless} k$ und folglich $|k, \mathfrak{H}| < e_r k^{r-1}$. Ist k kein Divisor von e_{r-1}, so ist $s_r \overline{\gtrless} e_r$, $s_{r-1} < k$, $s_\varrho \overline{\gtrless} k$ $(\varrho = 1, 2 \dots r-2)$ und daher $|k, \mathfrak{H}| < e_r k^{r-1}$. Daher ist e_{r-1} die grösste Zahl k, für welche $|k, \mathfrak{H}| = e_r k^{r-1}$ ist, und nur wenn k ein Divisor von e_{r-1} und durch e_r theilbar ist, kann diese Gleichung stattfinden.

Allgemein ergiebt sich, nachdem $e_r, e_{r-1} \dots e_{\varrho+1}$ unabhängig von der Wahl der normalen Basis definirt sind, e_ϱ durch die folgende Regel: e_ϱ ist die grösste Zahl k, für welche

$$(2.) \qquad |k, \mathfrak{H}| = e_r\, e_{r-1} \dots e_{\varrho+1}\, k^\varrho$$

ist, und nur wenn k ein Divisor von e_ϱ und durch $e_{\varrho+1}$ theilbar ist, kann diese Gleichung stattfinden. Daher kann man e_ϱ auch als die grösste durch $e_{\varrho+1}$ theilbare Zahl k definiren, welche der Gleichung (2.) genügt.

Die Zahlen $e_1, e_2 \dots e_r$, deren Product gleich h ist, sind folglich von der Wahl der normalen Basis unabhängig; sie werden die *Elementartheiler* der Ordnung h oder die *Invarianten* der Gruppe $\mathfrak{H}$*) genannt, und zwar e_ϱ die ϱte Invariante. Es ist zweckmässig, falls $\varrho > r$ ist, $e_\varrho = 1$ zu setzen.

Wir haben oben zuerst e_r, dann e_{r-1} u. s. w., zuletzt e_1 unabhängig von der Wahl der normalen Basis definirt. Man kann diese Zahlen aber auch in der umgekehrten Reihenfolge charakterisiren: e_1 ist die kleinste Zahl k, für welche $(k, \mathfrak{H}) = 1$ ist, und nur wenn k ein Vielfaches von e_1 ist, kann diese Gleichung bestehen. e_2 ist die kleinste Zahl k, für welche $(k, \mathfrak{H}) = \frac{e_1}{k}$ ist, und nur wenn k ein Vielfaches von e_2 und ein Divisor von e_1 ist, kann diese Gleichung bestehen. Allgemein ist $e_{\varrho+1}$ die kleinste Zahl k, für welche

---

*) Was wir eine elementare Gruppe nennen, bezeichnet *Gauss* als eine reguläre Gruppe, und er nennt die Zahl $e_2\, e_3 \dots e_r = \frac{h}{e_1}$ den Irregularitätsexponenten. Da indessen nicht nur die Ordnung h und ihr erster Elementartheiler e_1, sondern auch alle übrigen Elementartheiler Invarianten sind, so schien es uns passend, von diesem Namen abzugehen. Das Problem, den Irregularitätsexponenten einer Determinante D zu bestimmen, über welches *Gauss* (D. A. 306) einige Andeutungen giebt, wäre demnach genauer dahin zu präcisiren, die Klassenanzahl der Formen von der Determinante D in ihre Elementartheiler zu zerlegen. Vgl. *Stephen Smith, Report of the 32. meeting of the Brit. Ass. for the adv. of science 1862. p. 524.*

$$(3.) \qquad (k, \mathfrak{H}) = \frac{e_1 e_2 \dots e_\varrho}{k^\varrho}$$

ist, und nur wenn k ein Vielfaches von $e_{\varrho+1}$ und ein Divisor von e_ϱ ist, kann diese Gleichung stattfinden; $e_{\varrho+1}$ ist also der kleinste Divisor von e_ϱ, welcher der Gleichung (3.) genügt.

Ist $\mathfrak{K}$ die Gruppe der $k$ten Potenzen in $\mathfrak{H}$ und r_k der Rang von $\mathfrak{K}$, also $r_1 = r$, so kann man den Beweis für die Invarianz der Zahlen e_ϱ, anstatt auf die Betrachtung der Ordnung $(k, \mathfrak{H})$ der Gruppe $\mathfrak{K}$, auch auf die Betrachtung ihres Ranges r_k stützen. Ist q_ϱ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von k und e_ϱ, so gehört H_ϱ^k zum Exponenten $q_\varrho : k$. Ist k durch e_{s+1}, aber nicht durch e_s theilbar, so stellt der Ausdruck

$$(H_1^{x_1} H_2^{x_2} \dots H_r^{x_r})^k = (H_1^k)^{x_1} (H_2^k)^{x_2} \dots (H_s^k)^{x_s}$$

alle Elemente von $\mathfrak{K}$ dar, und folglich bilden $H_1^k, H_2^k, \dots H_s^k$ eine Basis von $\mathfrak{K}$, und zwar eine normale, weil sie von einander unabhängig sind, $q_\sigma : k$ durch $q_{\sigma+1} : k$ theilbar und $q_s : k > 1$ ist. Nach der obigen Entwicklung ist daher s der Rang von $\mathfrak{K}$.

II. *Ist e_ϱ die ϱte Invariante einer Gruppe $\mathfrak{H}$, und ist k durch e_{s+1}, aber nicht durch e_s theilbar, so ist s der Rang der Gruppe der $k$ten Potenzen in $\mathfrak{H}$.*

II*. *Ist der Rang der Gruppe der $k$ten Potenzen in einer Gruppe $\mathfrak{H}$ kleiner als ϱ, so ist k durch die ϱte Invariante der Gruppe theilbar.*

Ist $e_\lambda > e_{\lambda+1} = e_{\lambda+2} = \dots = e_{\lambda+\mu} > e_{\lambda+\mu+1}$, so ist daher, falls $k = e_{\lambda+1}$ ist, $r_k = \lambda$, falls aber $k < e_{\lambda+1}$ ist, $r_k \geqq \lambda + \mu$, und falls $k = e_{\lambda+\mu+1}$ ist, $r_k = \lambda + \mu$. Daraus folgt:

III. *Ist e_ϱ die ϱte Invariante einer Gruppe $\mathfrak{H}$ und r_k der Rang der Gruppe der $k$ten Potenzen in $\mathfrak{H}$, so sind, falls r_e um μ kleiner ist als die kleinste der Zahlen $r_1, r_2 \dots r_{e-1}$, genau μ der Zahlen e_ϱ gleich e; ist aber r_e nicht kleiner als jede der Zahlen $r_1, r_2 \dots r_{e-1}$, so ist keine der Zahlen e_ϱ gleich e.*

Mithin sind die Zahlen e_ϱ von der Wahl der normalen Basis unabhängig.

Ist $k = e_\varrho$, so ist nach Satz II der Rang von $\mathfrak{K}$ kleiner als ϱ. Ist nun $\mathfrak{H}'$ irgend ein Divisor von $\mathfrak{H}$, und ist $\mathfrak{K}'$ die Gruppe der $k$ten Po-

tenzen in $\mathfrak{H}'$, so ist auch $\mathfrak{K}'$ ein Divisor von $\mathfrak{K}$. Mithin ist nach Satz II, §. 5 der Rang von $\mathfrak{K}'$ nicht grösser als der Rang von $\mathfrak{K}$, also ebenfalls kleiner als ϱ. Nach Satz II* ist folglich k durch die ϱte Invariante e'_ϱ von $\mathfrak{H}'$ theilbar.

IV. *Die ϱte Invariante eines Divisors einer Gruppe geht in der ϱten Invariante der Gruppe auf.*

Sind umgekehrt $e'_1, e'_2, \dots e'_s > 1$ irgend s Zahlen, von denen e'_σ in $e'_{\sigma-1}$ und in e_σ aufgeht, so bilden $H_1^{e_1:e'_1}, H_2^{e_2:e'_2}, \dots H_s^{e_s:e'_s}$ eine normale Basis eines Divisors von $\mathfrak{H}$, dessen σte Invariante e'_σ ist.

Anmerkung. Ist $\mathfrak{F}$ die Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{H}$, welche der Gleichung $X^2 = E$ genügen, so ist die erste Invariante von $\mathfrak{F}$ gleich 2 (ausser für $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$), und folglich sind auch alle übrigen gleich 2. Ist s der Rang dieser Gruppe, und bilden $F_1, F_2 \dots F_s$ eine normale Basis derselben, so stellt der Ausdruck $F_1^{x_1} F_2^{x_2} \dots F_s^{x_s}$ alle Elemente von $\mathfrak{F}$ und jedes nur einmal dar, wenn man jeder der Variabeln x_σ unabhängig von den andern die Werthe 0 und 1 beilegt. Das Product aller Elemente von $\mathfrak{F}$ ist daher gleich $(F_1 F_2 \dots F_s)\, 2^{s-1}$, also gleich E, wenn $s > 1$ ist, und gleich F_1, wenn $s = 1$ ist. Ist A ein Element von $\mathfrak{H}$, welches nicht der Gleichung $X^2 = E$ genügt, so genügt auch A^{-1} derselben nicht und ist von A verschieden; das Product dieser beiden Elemente ist gleich E. Daraus ergiebt sich leicht der (*Wilson*sche) Satz:

Das Product aller Elemente einer Gruppe ist gleich E, ausser wenn es in dieser Gruppe nur ein einziges von E verschiedenes Element F giebt, das der Gleichung $X^2 = E$ genügt; in diesem Falle ist jenes Product gleich F.

§. 8. Zerlegung einer Gruppe in irreductible Factoren.

Eine Gruppe, deren Ordnung durch mehr als eine Primzahl theilbar ist, kann nach §. 4 in mehrere primäre Gruppen, und eine Gruppe, deren Rang $r > 1$ ist, nach §. 6 in r elementare Gruppen zerlegt werden. Damit also eine Gruppe unzerlegbar sei, ist nothwendig, dass ihre Ordnung eine Potenz einer Primzahl, p^π, und ihr Rang gleich 1 ist. Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend, es kann sogar eine Gruppe $\mathfrak{H}$, welche sie erfüllt, nicht einmal als Product von zwei Factoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

dargestellt werden, ohne dass einer derselben gleich der ganzen Gruppe ist. Denn da $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ theilbar ist, so müssen nach Satz II, §. 2 die Ordnungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Potenzen von p, etwa p^α und p^β sein, wo α und β nicht grösser als π sind. Jedes Element H der Gruppe $\mathfrak{H}$ ist das Product aus einem Elemente A von $\mathfrak{A}$ und einem Elemente B von $\mathfrak{B}$. Da nun nach Satz I, §. 4 $A^{p^\alpha} = E$ und $B^{p^\beta} = E$ ist, so ist auch, falls $\alpha \geqq \beta$ ist, $H^{p^\alpha} = E$. In der elementaren Gruppe $\mathfrak{H}$ giebt es aber primitive Elemente, die zum Exponenten p^π gehören; wählt man für H ein solches, so erkennt man, dass α nicht kleiner als π sein kann. Mithin muss $\alpha = \pi$ und folglich $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}$ sein. Demzufolge kann man die Definition, welche wir in §. 1 von einer unzerlegbaren Gruppe gegeben haben, auch durch die folgende ersetzen:

Eine Gruppe heisst unzerlegbar oder irreductibel, wenn sie nicht gleich dem Producte zweier Factoren sein kann, ohne dass einer derselben gleich der ganzen Gruppe ist.

I. *Damit eine Gruppe unzerlegbar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass sie primär und elementar ist.*

Eine Gruppe $\mathfrak{H}$, die nicht unzerlegbar ist, kann nach §. 1 in lauter irreductible Factoren

$$(1.)\qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2 \dots$$

zerlegt werden. Die Ordnungen derselben seien

$$(2.)\qquad a^{\alpha_1},\, a^{\alpha_2} \dots b^{\beta_1},\, b^{\beta_2} \dots c^{\gamma_1},\, c^{\gamma_2} \dots,$$

wo $a, b, c \dots$ verschiedene Primzahlen bedeuten. Sind A_ϱ, B_ϱ, $C_\varrho \dots$ primitive Elemente der elementaren Gruppen $\mathfrak{A}_\varrho$, $\mathfrak{B}_\varrho$, $\mathfrak{C}_\varrho \dots$, so heissen sie auch primitive Elemente der Gruppe $\mathfrak{H}$, und die von ihnen gebildete Basis

$$(3.)\qquad A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots C_1, C_2 \dots$$

heisst eine *reducirte Basis* der Gruppe $\mathfrak{H}$. Setzt man nun

$$(4.)\qquad \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \dots = \mathfrak{A},\; \mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \dots = \mathfrak{B},\; \mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2 \dots = \mathfrak{C} \dots,$$

$$(5.)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots = \alpha,\; \beta_1 + \beta_2 + \dots = \beta,\; \gamma_1 + \gamma_2 + \dots = \gamma \dots,$$

so sind $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma \dots$ die Ordnungen der primären Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$ und $h = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \dots$ die Ordnung ihres Productes $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \dots$. Wie also auch die Zerlegung (1.) ausgeführt sein möge, so müssen doch nach §. 4 die Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$ stets die nämlichen sein.

Ist die Anzahl der irreductiblen Factoren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \dots$ von $\mathfrak{A}$ gleich r, und denkt man sich dieselben so geordnet, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$ eine abnehmende Reihe bilden, so bilden $A_1, A_2 \dots A_r$ eine normale Basis von $\mathfrak{A}$, da $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_r$ theilerfremd sind, der Exponent a^{α_ϱ}, zu welchem A_ϱ gehört, durch $a^{\alpha_{\varrho+1}}$ theilbar und $a^{\alpha_r} > 1$ ist. Der Rang r der Gruppe $\mathfrak{A}$ und ihre ϱte Invariante a^{α_ϱ} sind daher nach §.7 unabhängig von der Art, wie $\mathfrak{A}$ in die irreductiblen Factoren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_r$ zerlegt worden ist. Nennt man also die Zahlen (2.) die *einfachen Elementartheiler der Ordnung*

$$h = a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} \dots b^{\beta_1} b^{\beta_2} \dots c^{\gamma_1} c^{\gamma_2} \dots$$

oder die *primären Invarianten der Gruppe* $\mathfrak{H}$, so kann man den Satz aussprechen:

II. *Wie auch immer eine Gruppe in irreductible Factoren zerlegt wird, die Ordnungen dieser Factoren und ihre Anzahl haben stets dieselben Werthe.*

Wenn $\mathfrak{H}$ in zwei Factoren $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ zerlegt ist, so kann man, um $\mathfrak{H}$ in irreductible Factoren zu zerlegen, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ für sich zerlegen. Daraus folgt:

III. *Die primären Invarianten einer zerlegbaren Gruppe sind die ihrer einzelnen Factoren zusammengenommen.*

Ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ zerlegbar, und ist $\mathfrak{G}$ eine elementare Gruppe der Ordnung $g = pq \dots$, wo $p, q \dots$ Potenzen verschiedener Primzahlen sind, so kann man $\mathfrak{G}$ stets und nur auf eine Weise in primäre Gruppen der Ordnungen $p, q \dots$ zerlegen. Dieselben sind nach Satz II*, §. 5 elementar und folglich nach Satz I irreductibel. Daher sind $p, q \dots$ primäre Invarianten von $\mathfrak{H}$. Eine Zahl g heisst (im weiteren Sinne) eine *Invariante* der Gruppe $\mathfrak{H}$, wenn die Potenzen verschiedener Primzahlen, deren Product diese Zahl ist, sämmtlich primäre Invarianten von $\mathfrak{H}$ sind. Mithin ergiebt sich der Satz:

IV. *Wird eine Gruppe irgendwie in zwei Factoren zerlegt, deren einer eine elementare Gruppe ist, so ist die Ordnung dieses Factors eine Invariante der Gruppe.*

Mehrere Zahlen $g_1, g_2 \dots g_n$ bilden ein *vollständiges System von Invarianten der Gruppe* $\mathfrak{H}$ (oder ein *vollständiges System zusammengesetzter Elementartheiler von* h), wenn die Potenzen verschiedener Primzahlen,

deren Producte diese Zahlen sind, die sämmtlichen primären Invarianten von $\mathfrak{H}$ sind. Demnach gilt ferner der Satz:

V. *Wird eine Gruppe irgendwie in lauter elementare Factoren zerlegt, so bilden ihre Ordnungen ein vollständiges System von Invarianten der Gruppe.*

Ist $g = a^{\alpha_\varrho} b^{\beta_\sigma} c^{\gamma_\tau} \dots$ irgend eine Invariante von $\mathfrak{H}$, und ist $\mathfrak{A}_\varrho \mathfrak{B}_\sigma \mathfrak{C}_\tau \dots = \mathfrak{G}$, und das Product der übrigen irreductibeln Factoren (1.) von $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ zerlegbar und nach Satz III[a], §. 5 ist $\mathfrak{G}$ eine elementare Gruppe der Ordnung g.

VI. *Eine Gruppe, von der g eine Invariante ist, kann in zwei Factoren zerlegt werden, deren einer eine elementare Gruppe der Ordnung g ist.*

VII. *Bilden $g_1, g_2 \dots g_n$ irgend ein vollständiges System von Invarianten einer Gruppe, so kann dieselbe in n elementare Factoren der Ordnungen $g_1, g_2 \dots g_n$ zerlegt werden.*

Nennt man im weiteren Sinne eine Basis $G_1, G_2 \dots G_n$ von $\mathfrak{H}$ *reducirt*, wenn ihre Elemente von einander unabhängig sind, so bilden also die Ordnungen $g_1, g_2 \dots g_n$ der Elemente jeder reducirten Basis ein vollständiges System von Invarianten der Gruppe, und umgekehrt entspricht jedem vollständigen System von Invarianten $g_1, g_2 \dots g_n$ eine reducirte Basis $G_1, G_2 \dots G_n$.

Da man $\mathfrak{H}$ in die elementaren Gruppen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2 \dots \mathfrak{H}$ des §. 6 zerlegen kann, so bilden $e_1, e_2 \dots e_r$ ein vollständiges System von Invarianten der Gruppe $\mathfrak{H}$. Zum Unterschiede von andern Systemen mag dasselbe das System der *normalen Invarianten* genannt werden.

VIII. *Zerlegt man die Elementartheiler der Ordnung einer Gruppe in Potenzen verschiedener Primzahlen, so erhält man die sämmtlichen primären Invarianten der Gruppe.*

Aus einem vollständigen System von Invarianten $g_1, g_2 \dots g_n$ berechnet man die normalen Invarianten $e_1, e_2 \dots e_r$ folgendermassen: Man zerlege zunächst jede der Zahlen g_ν in Potenzen verschiedener Primzahlen (2.), die so erhaltenen einfachen Elementartheiler von h ordne man so, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ eine abnehmende Reihe bilden (zu der man auch noch einige Nullen hinzufügen kann), ebenso die Zahlen $\beta_1, \beta_2 \dots$;

$\gamma_1, \gamma_2 \dots$ Daraus, dass e_ϱ durch $e_{\varrho+1}$ theilbar sein muss, ergiebt sich dann leicht, dass

$$e_\varrho = a^{\alpha_\varrho} b^{\beta_\varrho} c^{\gamma_\varrho} \dots$$

ist. — Ohne die Zahlen g_ν in Primfactoren zu zerlegen, kann man aus ihnen die Zahlen e_ϱ auch folgendermassen berechnen (vgl. *Frobenius*, dieses Journal Bd. 86, S. 163): Ist d_n der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen $g_1, g_2 \dots g_n$, ist d_{n-1} der grösste gemeinsame Divisor der Producte von je zweien derselben, allgemein $d_{n-\lambda+1}$ der grösste gemeinsame Divisor der Producte von je λ derselben, und $d_1 = g_1 g_2 \dots g_n = k$: Dann sind nicht nur die Quotienten $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda+1}} = e_\lambda$ $(d_n = e_n)$, sondern auch die Quotienten $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda+1}}$ ganze Zahlen, und die Zahlen $e_1, e_2 \dots e_n$ sind, so weit sie grösser als 1 sind, die normalen Invarianten der Gruppe $\mathfrak{H}$. Ist also der grösste gemeinsame Divisor von $g_1, g_2 \dots g_n$ grösser als 1, so ist $r = n$; ist er aber gleich 1, so ist $r < n$.

Dass die Ordnungen (2.) der irreductibeln Factoren, in welche die Gruppe $\mathfrak{H}$ zerlegt werden kann, Invarianten sind, kann man unabhängig von den Entwicklungen des §. 7 auch folgendermassen erkennen. Bilden $G_1, G_2 \dots G_n$ irgend eine reducirte Basis von $\mathfrak{H}$ (z. B. die Basis (3.)), und gehört G_ϱ zum Exponenten g_ϱ, so ergiebt sich wie in §. 7, dass die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$

$$|k, \mathfrak{H}| = s_1 s_2 \dots s_n$$

ist, wo s_ν den grössten gemeinsamen Divisor von k und g_ν bezeichnet. Ist a eine Primzahl, g_ν genau durch a^{α_ν} theilbar, und ist $\alpha_\lambda \geqq \alpha$, $\alpha_\mu < \alpha$, so ist, falls $k = a^\alpha$ gesetzt wird, $s_\lambda = a^\alpha$ und $s_\mu = a^{\alpha_\mu}$, und falls $k = a^{\alpha-1}$ genommen wird, $s_\lambda = a^{\alpha-1}$ und $s_\mu = a^{\alpha_\mu}$. Setzt man also

$$(6.) \qquad \frac{|a^\alpha, \mathfrak{H}|}{|a^{\alpha-1}, \mathfrak{H}|} = a^{\psi(\alpha)},$$

so giebt die Function $\psi(\alpha)$ an, wie viele der Zahlen $g_1, g_2 \dots g_n$ durch a^α theilbar sind, und die Differenz $\psi(\alpha) - \psi(\alpha+1)$ giebt an, wie viele jener Zahlen genau durch a^α theilbar sind. Daraus folgt aber leicht, dass die Potenzen verschiedener Primzahlen (2.), deren Producte die Zahlen

$g_1, g_2 \ldots g_n$ sind, nur von der Constitution der Gruppe $\mathfrak{H}$ und nicht von der Wahl der reducirten Basis $G_1, G_2 \ldots G_n$ abhängen.

IX. *Ist a eine Primzahl und $|a^\alpha, \mathfrak{H}| = f(\alpha)$, so sind in jedem vollständigen Invariantensystem von $\mathfrak{H}$*

$$\frac{\log f(\alpha) - \log f(\alpha - 1)}{\log a}$$

Zahlen durch a^α theilbar, und die Anzahl der primären Invarianten, welche gleich a^α sind, ist

$$\frac{2 \log f(\alpha) - \log f(\alpha + 1) - \log f(\alpha - 1)}{\log a}.$$

Nebenbei ergiebt sich die Folgerung, dass die Differenz $\psi(\alpha) - \psi(\alpha + 1)$ niemals negativ ist:

X. *Ist a eine Primzahl, und setzt man $(a^\alpha, \mathfrak{H}) = f(\alpha)$, so ist nicht nur $\dfrac{f(\alpha)}{f(\alpha - 1)} = g(\alpha)$, sondern auch $\dfrac{g(\alpha)}{g(\alpha + 1)}$ eine ganze Zahl.*

Die Function $\psi(\alpha)$ kann auch als die Anzahl derjenigen Wurzeln der Gleichung $X^a = E$ erklärt werden, welche $a^{\alpha - 1}$te Potenzen in der Gruppe $\mathfrak{H}$ sind, oder als die Anzahl der verschiedenen Elemente, welche man erhält, indem man alle Wurzeln der Gleichung $X^{a^\alpha} = E$ in der Gruppe $\mathfrak{H}$ auf die $a^{\alpha-1}$te Potenz erhebt.

Wir knüpfen hieran noch die beiden folgenden leicht zu beweisenden Sätze:

XI. *Die Anzahl der Elemente einer Gruppe $\mathfrak{H}$, welche zum Exponenten $k = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ gehören, ist gleich*

$$|k, \mathfrak{H}| - \Sigma \left|\frac{k}{a}, \mathfrak{H}\right| + \Sigma \left|\frac{k}{ab}, \mathfrak{H}\right| - \Sigma \left|\frac{k}{abc}, \mathfrak{H}\right| + \cdots =$$
$$= \Pi \{ |a^\alpha, \mathfrak{H}| - |a^{\alpha-1}, \mathfrak{H}| \} = |k, \mathfrak{H}| \, \Pi (1 - a^{-\psi(\alpha)}).$$

XII. *Ist $k = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, so ist die Anzahl der primitiven Wurzeln der Gleichung $X^k = E$ gleich*

$$\Pi \frac{|a^\alpha, \mathfrak{H}| \, |a^\alpha, \mathfrak{H}| - |a^{\alpha+1}, \mathfrak{H}| \, |a^{\alpha-1}, \mathfrak{H}|}{|a^\alpha, \mathfrak{H}|} = |k, \mathfrak{H}| \, \Pi (1 - a^{\psi(\alpha+1) - \psi(\alpha)}).$$

§. 9. Primitive Elemente einer Gruppe.

Indem wir zur Charakterisirung der Elemente einer Gruppe übergehen, welche geeignet sind, eine reducirte Basis derselben zu bilden, beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung einer primären Gruppe $\mathfrak{A}$. Ist ihre Ordnung eine Potenz der Primzahl a, so ist nach Satz II[b], §. 2 auch die Ordnung jedes Elementes von $\mathfrak{A}$ eine Potenz von a. Ist a^{α_1} die grösste dieser Ordnungen, so lege man der Zahl α der Reihe nach die Werthe von α_1 bis 1 bei und untersuche für jeden derselben, ob die Gleichung

$$(1.) \qquad X^{a^\alpha} = E$$

primitive Wurzeln hat oder nicht (§. 3, 3). Im ersteren Falle ermittle man irgend ein vollständiges System unabhängiger primitiver Wurzeln derselben. Die Gesammtheit der so erhaltenen Elemente $A_1, A_2 \dots A_r$ nennen wir ein *vollständiges System primitiver Elemente* von $\mathfrak{A}$. Ordnet man dieselben so, dass ihre Ordnungen $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \dots a^{\alpha_r}$ eine abnehmende Reihe bilden, und ist etwa

$$(2.) \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\xi > \alpha_{\xi+1} = \cdots = \alpha_\eta > \alpha_{\eta+1} = \cdots = \alpha_\zeta > \alpha_{\zeta+1} \dots,$$

so bilden demnach $A_1, A_2, \dots A_\xi$ ein vollständiges System unabhängiger primitiver Wurzeln der Gleichung (1.) für $\alpha = \alpha_\xi$; $A_{\xi+1}, \dots A_\eta$ ein solches für $\alpha = \alpha_\eta$; $A_{\eta+1}, \dots A_\zeta$ für $\alpha = \alpha_\zeta$ u. s. w., und wenn α keiner der Zahlen (2.) gleich ist, so hat die Gleichung (1.) keine primitive Wurzel.

Wir behaupten nun, dass die Gleichung

$$(3.) \qquad A_1^{u_1} A_2^{u_2} \dots A_r^{u_r} = U^{a^\alpha}$$

nicht durch ein Element U der Gruppe $\mathfrak{A}$ befriedigt werden kann, ohne dass die Exponenten der von E verschiedenen Factoren der linken Seite sämmtlich durch a^α theilbar sind. Denn sei, nach Unterdrückung der dem Hauptelemente E gleichen Factoren, a^β die höchste in allen Exponenten u_ϱ aufgehende Potenz von a, sei λ die kleinste Zahl, für welche $u_{\lambda+1}$ genau durch a^β theilbar ist (so dass also $u_1, \dots u_\lambda$ die Primzahl a mindestens in der $(\beta+1)$ten Potenz enthalten), und sei $\alpha_{\lambda+1} = \cdots = \alpha_\mu > \alpha_{\mu+1}$. Da $A_{\lambda+1}^{u_{\lambda+1}}$ von E verschieden vorausgesetzt ist, so ist $u_{\lambda+1}$ nicht durch $a^{\alpha_{\lambda+1}}$

theilbar, also $\alpha_{\lambda+1}$ $(=\alpha_\mu)>\beta$. Erhebt man dann die Gleichung (3.) auf die Potenz $a^{\alpha_\mu-\beta-1}$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$A_1^{v_1} A_2^{v_2} \dots A_r^{v_r} = U^{a^{\alpha_\mu+\alpha-\beta-1}}.$$

In derselben sind die Exponenten v_ϱ der von E verschiedenen Factoren der linken Seite alle durch $a^{\alpha_\mu-1}$ theilbar, und folglich sind $A_{\mu+1}^{v_{\mu+1}}, \dots A_r^{v_r}$ gleich E. Ferner enthalten $v_1, \dots v_\lambda$ die Primzahl a in der $\alpha_\mu$ten Potenz, $v_1 = -a^{\alpha_\mu} w_1, \dots v_\lambda = -a^{\alpha_\mu} w_\lambda$. Endlich sind $v_{\lambda+1}, \dots v_\mu$ durch $a^{\alpha_\mu-1}$ theilbar und $v_{\lambda+1}$ durch keine höhere Potenz von a. Wäre nun $\beta<\alpha$ und setzte man

$$A_1^{w_1} \dots A_\lambda^{w_\lambda} U^{a^{\alpha-\beta-1}} = W,$$

so wäre

$$A_{\lambda+1}^{v_{\lambda+1}} \dots A_\mu^{v_\mu} = W^{a^{\alpha_\mu}}$$

und $A_{\lambda+1}^{v_{\lambda+1}}$ von E verschieden. Folglich wären die primitiven Wurzeln $A_{\lambda+1}, \dots A_\mu$ der Gleichung $X^{a^{\alpha_\mu}} = E$ nicht von einander unabhängig. Mithin muss $\alpha \leqq \beta$ sein.

Da die $\alpha_1$te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{A}$ gleich E ist, so ergiebt sich aus dem erhaltenen Resultate für $\alpha=\alpha_1$ die Folgerung, dass die Gleichung

$$A_1^{u_1} A_2^{u_2} \dots A_r^{u_r} = E$$

nur bestehen kann, wenn jeder Factor der linken Seite für sich gleich E ist.

Die Gruppe $\mathfrak{D}$, deren Basis die unabhängigen Elemente $A_1, A_2 \dots A_r$ bilden, ist ein Divisor von $\mathfrak{A}$. In Bezug auf $\mathfrak{D}$ gehört jedes Element von $\mathfrak{A}$ zu einem gewissen Exponenten, der eine Potenz von a ist. Wenn a^α der grösste dieser Exponenten ist, so ist die a^αte Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{D}$ enthalten. Gehört das Element U von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{D}$ zum Exponenten a^α, und ist $U^{a^\alpha} = \Pi\,(A_\varrho^{u_\varrho})$, so sind, nach Unterdrückung der dem Hauptelemente gleichen Factoren des Productes, die Exponenten u_ϱ alle durch a^α theilbar, $u_\varrho = -a^\alpha v_\varrho$. Setzt man daher $U\Pi\,(A_\varrho^{v_\varrho}) = V$, so ist $V^{a^\alpha} = E$, und V gehört ebenso wie U in Bezug auf $\mathfrak{D}$ zum Exponenten a^α (Vgl. §. 6). Wäre nun $\alpha>0$, so wäre V^v für $0<v<a^\alpha$ nicht in $\mathfrak{D}$ enthalten, also, weil jede a^αte Potenz der

Gruppe $\mathfrak{D}$ angehört, keine a^αte Potenz. Mithin wäre V eine primitive Wurzel der Gleichung (1.), also α gleich einer der Zahlen (2.). Sei $\alpha=\alpha_{\lambda+1}=\cdots=\alpha_\mu$ und $\alpha_\lambda>\alpha>\alpha_{\mu+1}$. Ist dann W irgend ein Element von $\mathfrak{A}$, so sind $A_{\lambda+1},\dots A_\mu$ und W^{a^α} in $\mathfrak{D}$ enthalten, und folglich kann, da V in Bezug auf $\mathfrak{D}$ zum Exponenten a^α gehört, die Gleichung $V^v=A_{\lambda+1}^{u_{\lambda+1}}\dots A_\mu^{u_\mu}W^{a^\alpha}$ nur bestehen, wenn v durch a^α theilbar ist. Mithin wäre V eine von $A_{\lambda+1},\dots A_\mu$ unabhängige primitive Wurzel der Gleichung (1.). Da aber nach der Annahme $A_{\lambda+1},\dots A_\mu$ ein vollständiges System primitiver Wurzeln derselben bilden, so muss $\alpha=0$ sein, also jedes Element von $\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{D}$ angehören und folglich $\mathfrak{D}=\mathfrak{A}$ sein. Daher bilden die Elemente $A_1,A_2\dots A_r$ eine Basis von A, und weil sie von einander unabhängig sind, eine reducirte Basis. Da die Zahlen (2.) für jede reducirte Basis die nämlichen Werthe haben, so besteht jedes vollständige System unabhängiger primitiver Wurzeln aus gleich vielen Elementen.

Seien jetzt umgekehrt $A_1, A_2\dots A_r$ die Elemente irgend einer reducirten Basis der primären Gruppe $\mathfrak{A}$, so geordnet, dass ihre Ordnungen $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}\dots a^{\alpha_r}$ eine abnehmende Reihe bilden. Damit dann $X=A_1^{x_1}A_2^{x_2}\dots A_r^{x_r}$ der Gleichung (1.) genüge, ist nothwendig und hinreichend, dass, falls $\alpha_\lambda>\alpha\geqq\alpha_{\lambda+1}$ ist, x_1 durch $a^{\alpha_1-\alpha},\dots x_\lambda$ durch $a^{\alpha_\lambda-\alpha}$ theilbar ist. Ist zunächst α keiner der Zahlen (2.) gleich, ist also $\alpha_\lambda>\alpha>\alpha_{\lambda+1}$, so ist, wenn man

$$(4.)\qquad A_1^{\frac{x_1}{a}}A_2^{\frac{x_2}{a}}\dots A_\lambda^{\frac{x_\lambda}{a}}=U$$

setzt, $X^{a^{\alpha-1}}=U^{a^\alpha}$, und mithin hat die Gleichung (1.) keine primitive Wurzel. Ist dagegen $\alpha=\alpha_{\lambda+1}=\cdots=\alpha_\mu$ und $\alpha_\lambda>\alpha>\alpha_{\mu+1}$, so bilden $A_{\lambda+1},\dots A_\mu$ ein vollständiges System unabhängiger primitiver Wurzeln der Gleichung (1.). Denn ist $A_{\lambda+1}^{x_{\lambda+1}}\dots A_\mu^{x_\mu}=U^{a^\alpha}$ und $U=A_1^{u_1}\dots A_r^{u_r}$, so ist $U^{a^\alpha}=A_1^{u_1a^\alpha}\dots A_\lambda^{u_\lambda a^\alpha}$, also $A_1^{-u_1a^\alpha}\dots A_\lambda^{-u_\lambda a^\alpha}A_{\lambda+1}^{x_{\lambda+1}}\dots A_\mu^{x_\mu}=E$. Daher müssen wegen der Unabhängigkeit der Elemente einer reducirten Basis $A_{\lambda+1}^{x_{\lambda+1}},\dots A_\mu^{x_\mu}$ einzeln gleich E sein. Ist endlich $X=A_1^{x_1}\dots A_r^{x_r}$ irgend eine Wurzel der Gleichung (1.), so ist unter Anwendung der Be-

zeichnung (4.) $X^{a^{\alpha-1}} A_{\lambda+1}^{-a^{\alpha-1}x_{\lambda+1}} \dots A_{\mu}^{-a^{\alpha-1}x_{\mu}} = U^{a^{\alpha}}$, und folglich ist X von $A_{\lambda+1}, \dots A_{\mu}$ nicht unabhängig. — Man erhält also jede reducirte Basis einer primären Gruppe $\mathfrak{A}$, indem man auf jede mögliche Art ein vollständiges System primitiver Elemente ermittelt.

Eine Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $a^{\pi} f$, wo f nicht durch die Primzahl a theilbar ist, kann, und zwar nur auf eine Weise, in zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}$ der Ordnungen a^{π} und f zerlegt werden. Eine primitive Wurzel oder ein vollständiges System unabhängiger primitiver Wurzeln der Gleichung (1.) in der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist es auch in der Gruppe $\mathfrak{H}$. Demnach ergeben sich aus den obigen Entwicklungen zusammen mit den Erörterungen des §. 3, 3 die folgenden Sätze, in denen a eine Primzahl bedeutet:

I. *Jedes vollständige System unabhängiger primitiver Wurzeln der Gleichung $X^k = E$ in einer Gruppe besteht aus gleich vielen Elementen.*

II. *Ist k keine Invariante der Gruppe $\mathfrak{H}$, so hat die Gleichung $X^k = E$ in derselben keine primitive Wurzel.*

III. *Wenn in einem vollständigen Invariantensystem einer Gruppe $\varkappa$ Invarianten gleich k und in keinem solchen Systeme mehr als $\varkappa$ gleich k sind, so hat die Gleichung $X^k = E$ genau $\varkappa$ unabhängige primitive Wurzeln in der Gruppe.*

IV. *Die zum Exponenten k gehörenden Elemente einer reducirten Basis einer Gruppe sind unabhängige primitive Wurzeln der Gleichung $X^k = E$ in der Gruppe.*

V. *Eine Gruppe, in welcher die Gleichung $X^k = E$ eine oder mehrere unabhängige primitive Wurzeln hat, kann in zwei zerlegt werden, für deren eine jene Wurzeln eine reducirte Basis bilden.*

VI. *Die Anzahl der unabhängigen primitiven Wurzeln der Gleichung $X^{a^{\alpha}} = E$ ist gleich der Anzahl ihrer primären Invarianten, welche gleich a^{α} sind.*

VII. *Die zum Exponenten a^{α} gehörenden Elemente einer reducirten Basis einer primären Gruppe bilden ein vollständiges System unabhängiger primitiver Wurzeln der Gleichung $X^{a^{\alpha}} = E$ in der Gruppe.*

VIII. *Sind $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\xi} > \alpha_{\xi+1} = \dots = \alpha_{\eta} > \alpha_{\eta+1} = \dots \alpha_{\zeta} > \alpha_{\zeta+1} \dots$ die Exponenten der Invarianten $a^{\alpha_1}, \dots a^{\alpha_r}$ einer primären Gruppe, und sind*

$A_1, A_2, \dots A_\xi$ *irgend* ξ *unabhängige primitive Wurzeln der Gleichung* $X^{a^{\alpha_\xi}} = E$, $A_{\xi+1}, \dots A_\eta$ *irgend* $\eta - \xi$ *solche Wurzeln der Gleichung* $X^{a^{\alpha_\eta}} = E$, *u. s. w., so bilden* $A_1, A_2, \dots A_r$ *eine normale Basis der Gruppe.*

§. 10. Die zugehörigen bilinearen Formen einer Gruppe.

Bilden die Elemente $A_1, A_2 \dots A_n$ eine Basis der Gruppe $\mathfrak{H}$, sind $s_{\delta\beta}$ $(\delta, \beta = 1, 2 \dots n)$ irgend n^2 ganze Zahlen, deren Determinante gleich ± 1 ist, und ist $q_{\beta\delta}$ der Coefficient von $s_{\delta\beta}$ in der Determinante $\pm |s_{\delta\beta}| = 1$, so ist jedes der beiden Systeme von n Gleichungen

$$(1.) \qquad B_\delta = A_1^{s_{\delta 1}} A_2^{s_{\delta 2}} \dots A_n^{s_{\delta n}}, \quad A_\beta = B_1^{q_{\beta 1}} B_2^{q_{\beta 2}} \dots B_n^{q_{\beta n}}$$

eine Folge des andern, und daher bilden $B_1, B_2 \dots B_n$ ebenfalls eine Basis von $\mathfrak{H}$.

Sind

$$v_1 = a_{\alpha 1}, \; v_2 = a_{\alpha 2} \dots, \; v_n = a_{\alpha n} \quad (\alpha = 1, 2 \dots m)$$

mehrere Lösungen der Gleichung

$$(2.) \qquad A_1^{v_1} A_2^{v_2} \dots A_n^{v_n} = E,$$

so genügen ihr auch alle Zahlen, welche durch die linearen Formen

$$(3.) \qquad v_1 = \Sigma\, a_{\alpha 1} x_\alpha, \; v_2 = \Sigma\, a_{\alpha 2} x_\alpha \dots v_n = \Sigma\, a_{\alpha n} x_\alpha$$

dargestellt werden, indem $x_1, x_2 \dots x_n$ unabhängig von einander alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen; und man kann auf unzählig viele Weisen die Zahlen $a_{\alpha\beta}$ so wählen, dass die linearen Formen (3.) alle Lösungen der Gleichung (2.) darstellen (eine specielle Weise, wo $a_{\alpha\beta}$ für $\alpha = \beta$ von Null verschieden und für $\alpha < \beta$ gleich Null ist, haben wir in §. 5 auseinandergesetzt). Alsdann sagen wir, die n linearen Formen (3.) gehören zur Basis $A_1, A_2 \dots A_n$.

I. *n lineare Formen, welche zu einer Basis von n Elementen gehören, sind von einander unabhängig.*

Denn eine Gleichung $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0$ mit constanten Coefficienten kann nicht bestehen, wenn dieselben nicht sämmtlich verschwinden. Gehört nämlich A_β zum Exponenten l_β, so genügt man der

Gleichung (2.), indem man $v_\beta = l_\beta$ und, falls δ von β verschieden ist, $v_\delta = 0$ setzt. Mithin muss $k_\beta l_\beta = 0$, und weil l_β von Null verschieden ist, $k_\beta = 0$ sein. Aus der Unabhängigkeit der linearen Formen (3.) folgt, dass $m \geqq n$ ist, und dass die Determinanten $n$ten Grades, die sich aus den Coefficienten der Formen bilden lassen, nicht sämmtlich verschwinden.

Sind $p_{\gamma\alpha}$. $(\gamma, \alpha = 1, 2 \dots m)$ irgend m^2 ganze Zahlen, deren Determinante gleich ± 1 ist, und ist $r_{\alpha\gamma}$ der Coefficient von $p_{\gamma\alpha}$ in der Determinante $\pm |p_{\gamma\alpha}| = 1$, so ist jedes der beiden Systeme von je m Gleichungen

$$(4.) \qquad x_\alpha = p_{1\alpha} x'_1 + p_{2\alpha} x'_2 + \dots + p_{m\alpha} x'_m, \quad x'_\gamma = r_{1\gamma} x_1 + r_{2\gamma} x_2 + \dots + r_{m\gamma} x_m$$

eine Folge des andern. Wenn daher die linearen Formen (3.) durch die Substitutionen (4.) in

$$(5.) \qquad w_1 = \Sigma c_{\gamma 1} x'_\gamma, \quad w_2 = \Sigma c_{\gamma 2} x'_\gamma \dots w_n = \Sigma c_{\gamma n} x'_\gamma$$

übergehen, so kann jedes Werthsystem, welches durch das eine der beiden Systeme von linearen Formen (3.) und (5.) dargestellt wird, auch durch das andere dargestellt werden. Es lässt sich zeigen, dass auch umgekehrt zwei Systeme von linearen Formen, welche genau die nämlichen Werthsysteme darstellen, stets durch unimodulare Substitutionen in einander transformirt werden können*). Nennt man daher alle Formensysteme, in welche ein gegebenes System durch unimodulare Substitutionen transformirt werden kann, eine *Klasse äquivalenter Formensysteme*, so ergiebt sich der Satz:

II. *Die Systeme von n linearen Formen, welche zu einer Basis von n Elementen gehören, sind die sämmtlichen Individuen einer Klasse äquivalenter Formensysteme.*

Bilden $A_1, A_2 \dots A_n$ irgend eine Basis der Gruppe $\mathfrak{H}$, und sind (3.) irgend n lineare Formen, welche zu dieser Basis gehören, so heisst die bilineare Form

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

der m Variabeln $x_1, x_2 \dots x_m$ und der n Variabeln $y_1, y_2 \dots y_n$ eine zur

*) Dabei muss man beide Systeme als von gleich vielen Variabeln abhängig ansehen, also wenn das eine in Wirklichkeit deren weniger enthält, sich vorstellen, dass die Coefficienten der fehlenden Variabeln gleich Null sind.

Gruppe $\mathfrak{H}$ *gehörende* (ihr *zugehörige* oder *adjungirte*) bilineare Form. Die Ableitungen einer solchen Form

$$(6.) \quad v_1 = \frac{\partial A}{\partial y_1}, \quad v_2 = \frac{\partial A}{\partial y_2} \cdots v_n = \frac{\partial A}{\partial y_n}$$

bilden ein System von linearen Formen, das zu einer gewissen aus n Elementen bestehenden Basis der Gruppe $\mathfrak{H}$ gehört. Der Rang der Form A ist nach Satz I gleich n.

III. *Enthält eine zugehörige bilineare Form einer Gruppe m Variabeln der einen Reihe und n der andern Reihe, so ist der Rang der Form gleich der kleineren der beiden Zahlen m und n.*

Sind die Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2} \dots [y_{n+1}, y_{n+2} \dots]$ von $x_1, x_2 \dots x_m$ $[y_1, y_2 \dots y_n]$ unabhängig, so ist auch $A + x_{m+1} y_{n+1} + x_{m+2} y_{n+2} + \cdots$ eine zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörende Form; denn ihre Ableitungen nach den Variabeln y gehören zu der Basis $A_1, A_2 \dots A_n, E, E \dots$ der Gruppe $\mathfrak{H}$.

Die bilineare Form A möge durch die unimodularen Substitutionen*)

$$(7.) \quad x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma, \quad y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta} y'_\delta$$

in die bilineare Form

$$B = \Sigma\, b_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta$$

übergehen. Dann hängen die Ableitungen

$$(8.) \quad v'_1 = \frac{\partial B}{\partial y'_1}, \quad v'_2 = \frac{\partial B}{\partial y'_2} \cdots v'_n = \frac{\partial B}{\partial y'_n}$$

der Form B mit den Ableitungen (6.) der Form A durch die Gleichungen

$$v'_1 = \Sigma\, q_{\beta 1} v_\beta, \quad v'_2 = \Sigma\, q_{\beta 2} v_\beta \dots v'_n = \Sigma\, q_{\beta n} v_\beta$$
$$v_1 = \Sigma\, s_{\delta 1} v'_\delta, \quad v_2 = \Sigma\, s_{\delta 2} v'_\delta \dots v_n = \Sigma\, s_{\delta n} v'_\delta$$

zusammen; mithin stellen die linearen Formen (8.) alle Lösungen der Gleichung

$$B_1^{v'_1} B_2^{v'_2} \dots B_n^{v'_n} = E$$

dar, wo die Elemente B_δ durch die Gleichungen (1.) definirt sind, also ebenfalls eine Basis der Gruppe $\mathfrak{H}$ bilden. Nennt man also alle bilinearen

*) Dabei ist es gleichgültig, ob die Variabeln x_α der Substitution (7.) sämmtlich in A vorkommen oder nicht; dagegen dürfen in derselben nicht mehr als n Variabeln y_β vorkommen.

Formen, in welche eine bestimmte Form durch unimodulare Substitutionen transformirt werden kann, eine Klasse äquivalenter Formen, und gehört die (von n Variabeln y abhängende) Form A zur Gruppe $\mathfrak{H}$, so gehört auch jede (von nicht mehr als n Variabeln y abhängende) mit A äquivalente Form B zur Gruppe $\mathfrak{H}$.

Ist nun e_ϑ der ϑte Elementartheiler*) der Form A, so kann dieselbe durch unimodulare Substitutionen in

$$H = e_1 x_1 y_1 + e_2 x_2 y_2 + \cdots + e_n x_n y_n$$

übergeführt werden. Ist $H_1, H_2 \dots H_n$ die correspondirende Basis von $\mathfrak{H}$, so kann die Gleichung

$$(9.) \qquad H_1^{v_1} H_2^{v_2} \dots H_n^{v_n} = E$$

nur dann und muss stets dann bestehen, wenn $v_1 = e_1 x_1$, $v_2 = e_2 x_2 \dots v_n = e_n x_n$, also v_1 durch e_1, v_2 durch $e_2 \dots$, v_n durch e_n theilbar ist. Daher gehört H_ϑ zum Exponenten e_ϑ, und die Gleichung (9.) erfordert, dass jeder Factor der linken Seite für sich gleich E ist. Ist $e_r > 1$ und $e_{r+1} = 1$, und ist $r < n$, so ist auch $e_{r+2} = \cdots = e_n = 1$ und $H_{r+1}, H_{r+2} \dots H_n$ gehören zum Exponenten 1, sind also gleich E. Mithin bilden die Elemente $H_1, H_2 \dots H_r$ schon für sich eine Basis der Gruppe $\mathfrak{H}$ und zwar, da sie von einander unabhängig sind, und da e_ϱ durch $e_{\varrho+1}$ theilbar und $e_r > 1$ ist, eine normale Basis.

Damit ist der in §. 6 abgeleitete Fundamentalsatz des Herrn *Schering* von Neuem bewiesen. Da ferner in §. 7 gezeigt worden ist, dass die Zahlen $e_1, e_2 \dots e_r$ für jede normale Basis dieselben Werthe haben, so ergiebt sich der Satz:

IV. *Die Elementartheiler jeder bilinearen Form, die zu einer Gruppe gehört, sind, soweit sie von 1 verschieden sind, die normalen Invarianten der Gruppe.*

Da zwei bilineare Formen, welche denselben Rang und dieselben Elementartheiler haben, stets äquivalent sind, so folgt daraus (*Frobenius*, dieses Journal Bd. 86, S. 159):

---

*) Ist $d_{n-\lambda+1}$ der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten λten Grades von A, so heisst $d_\lambda : d_{\lambda+1} = e_\lambda$ der λte Elementartheiler der Form A.

V. *Alle bilinearen Formen desselben Ranges, die zu einer Gruppe gehören, sind äquivalent.*

Die zu einer Gruppe gehörenden bilinearen Formen $n$ten Ranges bilden also die sämmtlichen von n Variabeln y abhängenden Individuen einer Klasse äquivalenter bilinearer Formen.

Aus den auf Seite 177—179 dieses Bandes entwickelten Sätzen ergiebt sich, dass

$$(k, \mathfrak{H}) = (k, A)$$

ist, wenn A irgend eine bilineare Form ist, die zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehört.

§. 11. Die Reste der Potenzen rationaler ganzer Zahlen in Bezug auf einen zusammengesetzten Modul.

Die Theorie der Gruppen wollen wir auf die Lehre von den Potenzresten für einen zusammengesetzten Modul

$$M = 2^{\mu} P P' P'' \ldots$$

anwenden, wo $P, P', P'' \ldots$ gewisse Potenzen verschiedener ungerader Primzahlen sind. Ist die Anzahl derselben gleich π, so sei $n = \pi$, falls $\mu = 0$ oder 1 ist, $n = \pi + 1$, falls $\mu = 2$ ist, und $n = \pi + 2$, falls $\mu > 2$ ist. Seien ferner

$$(1.) \qquad g_1, g_2 \ldots g_n$$

die Zahlen $\varphi(P), \varphi(P'), \varphi(P'') \ldots$ und ausserdem, falls $\mu = 2$ ist, die Zahl $\varphi(4) = 2 (= g_1)$, und falls $\mu > 2$ ist, die beiden Zahlen $2 (= g_1)$ und $2^{\mu-2} (= g_2)$. Ist $g_\varrho = \varphi(P)$, so kann man, da P und $\frac{M}{P}$ relative Primzahlen sind, eine Zahl G_ϱ finden, welche (mod. P) einer primitiven Wurzel von P und $\left(\text{mod.}\ \frac{M}{P}\right)$ der Zahl 1 congruent ist. Ist $\mu = 2$, so sei $G_1 \equiv 3$ (mod. 4) und $G_1 \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{M}{4}\right)$. Ist $\mu > 2$, so sei $G_2 \equiv 3$ oder 5 (mod. 8) und $G_2 \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{M}{2^{\mu}}\right)$; dann ist $G_2^{2^{\mu-3}} = G$ eine der vier verschiedenen Wurzeln ± 1, $2^{\mu-1} \pm 1$ der Congruenz $X^2 \equiv 1$ (mod. 2^{μ}). (Ist $\mu = 3$, so ist $G \equiv G_2$, ist $\mu > 3$, so ist $G \equiv 2^{\mu-1} + 1$). Ist G' eine der beiden

von 1 und G verschiedenen Wurzeln, so sei $G_1 \equiv G'$ (mod. 2^μ) und $G_1 \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{M}{2^\mu}\right)$. (Vgl. *Gauss*, D. A. 90).

Da $G_\varrho^{g_\varrho} \equiv 1$ (mod. P) und $G_\varrho \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{M}{P}\right)$ ist, so ist $G_\varrho^{g_\varrho} \equiv 1$ (mod. M). Ist umgekehrt $G_\varrho^v \equiv 1$ (mod. M), so ist auch $G_\varrho^v \equiv 1$ (mod. P) und daher ist v durch g_ϱ theilbar. Folglich gehört G_ϱ (mod. M) zum Exponenten g_ϱ. Ebenso gehört, falls $\mu > 1$ ist, G_1 zum Exponenten 2, und falls $\mu > 2$ ist, G_2 zum Exponenten $2^{\mu-2}$.

Wir behaupten ferner, dass die Elemente $G_1, G_2, \dots G_n$ von einander unabhängig sind. Denn ist

$$(2.)\qquad G_1^{v_1}\, G_2^{v_2} \dots G_n^{v_n} \equiv 1 \ (\text{mod.}\ M),$$

so besteht die nämliche Congruenz (mod. P). Weil aber $G_1, G_2 \dots G_n$ mit Ausnahme von G_ϱ congruent 1 (mod. P) sind, so ist $G_\varrho^{v_\varrho} \equiv 1$ (mod. P), und weil $G_\varrho \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{M}{P}\right)$ ist, $G_\varrho^{v_\varrho} \equiv 1$ (mod. M). Mithin reducirt sich die Congruenz (2.), falls $\mu = 2$ ist, auf $G_1^{v_1} \equiv 1$ (mod. M), und falls $\mu > 2$ ist, auf $G_1^{v_1} G_2^{v_2} \equiv 1$ (mod. M). Im letzteren Falle ist auch $G_1^{v_1} G_2^{v_2} \equiv 1$ (mod. 2^μ). Erhebt man beide Seiten ins Quadrat, so erhält man, da $G_1^2 \equiv 1$ (mod. 2^μ) ist, $G_2^{2v_2} \equiv 1$ (mod. 2^μ). Daher ist $2v_2$ durch $2^{\mu-2}$ theilbar, also $v_2 = -2^{\mu-3} v$. Mithin ist $G_1^{v_1} \equiv G^v$ (mod. 2^μ). Wäre nun v_1 ungerade, so wäre $G_1^{v_1} \equiv G_1 \equiv G^v$ (mod. 2^μ). Da aber G^v zufolge der Congruenz $G^2 \equiv 1$ (mod. 2^μ) nur einer der beiden Zahlen 1 oder G congruent sein kann, und G_1 von diesen beiden verschieden vorausgesetzt ist, so kann v_1 nicht ungerade sein. Ist aber v_1 gerade, so ist $G_1^{v_1} \equiv 1$ (mod. 2^μ), also auch (mod. M), und mithin reducirt sich die Congruenz (2.) auf $G_2^{v_2} \equiv 1$ (mod. M).

Da folglich $G_1, G_2 \dots G_n$ unabhängig sind, und da G_ϱ zum Exponenten g_ϱ gehört, so stellt der Ausdruck $X = G_1^{x_1} G_2^{x_2} \dots G_n^{x_n}$, falls $x_1, x_2 \dots x_n$ alle ganzen Zahlen durchlaufen, $g_1 g_2 \dots g_n = \varphi(M) = h$, d. h. alle Klassen von Zahlen dar, die (mod. M) verschieden und relativ prim zu M sind. Daher bilden $G_1, G_2 \dots G_n$ eine reducirte Basis der von diesen h Zahlenklassen gebildeten Gruppe $\mathfrak{H}$, und $g_1, g_2 \dots g_n$ ein vollständiges System von Invarianten dieser Gruppe (§. 8). Da diese Zahlen alle durch 2 theilbar sind, so ist der Rang der Gruppe $\mathfrak{H}$ gleich n. Ist $d_{n-\lambda+1}$ der

grösste gemeinsame Divisor der Producte von je λ der Zahlen (1.), so ist nach §. 8 $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda+1}} = e_\lambda$ $(d_n = e_n)$ der λte Elementartheiler von h*). Ist s_λ der grösste gemeinsame Divisor von k und g_λ, so ist

$$|k, \mathfrak{H}| = s_1 s_2 \dots s_n$$

die Anzahl der verschiedenen Wurzeln der Congruenz $X^k \equiv 1$ (mod. M), und

$$(k, \mathfrak{H}) = \frac{h}{s_1 s_2 \dots s_n}$$

die Anzahl der verschiedenen $k$ten Potenzreste (mod. M), z. B. ist $|2, \mathfrak{H}| = 2^n$. Die Anzahl der Zahlen, die zum Exponenten $k = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ gehören, ist

$$|k, \mathfrak{H}| \, \Pi(1 - a^{-\psi(\alpha)}),$$

wo $\psi(\alpha)$ angiebt, wie viele der Zahlen (1.) durch a^α theilbar sind. Ist z. B. $k = e_1$, so ist, da e_1 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen (1.) ist, $|k, \mathfrak{H}| = g_1 g_2 \dots g_n = h$, und $\psi(\alpha)$ mindestens 1. Daher ist die Anzahl der Zahlen, die zum Exponenten e_1 gehören, $\geqq h\, \Pi\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \varphi(h) = \varphi(\varphi(M))$.

Wir wollen endlich noch zeigen, dass es Gruppen giebt, die beliebig vorgeschriebene Invarianten $e_1, e_2 \dots e_n$ haben. Da sich in einer arithmetischen Reihe, deren Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, unzählig viele Primzahlen finden, so kann man n verschiedene ungerade Primzahlen $p_1, p_2 \dots p_n$ bestimmen, die den Congruenzen $p_\nu \equiv 1$ (mod. e_ν) $(\nu = 1, 2 \dots n)$ genügen. Ist dann $M = p_1 p_2 \dots p_n$, und haben G_1, $G_2 \dots G_n$ für diesen Modul die nämliche Bedeutung wie oben, und setzt man $H_\nu \equiv G_\nu^{\frac{p-1}{e_\nu}}$ (mod. M), so besitzt die Gruppe mit der Basis H_1, $H_2 \dots H_n$ die Invarianten $e_1, e_2 \dots e_n$.

§. 12. Die Reste der Potenzen complexer ganzer Zahlen.

Um die Theorie der Gruppen noch an einem zweiten Beispiele zu erläutern, betrachten wir eine Ordnung $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen eines alge-

---

*) Beispiele, an denen man diese Regel bestätigen kann, findet man bei *Cayley*, *Specimen table* $M \equiv a^\alpha b^\beta$ (mod. N) *for any Prime or Composite Modulus*, *Quart. Journ.* X. *p.* 95--96.

braischen Körpers vom $n$ten Grade*). Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal $f$ten Grades in $\mathfrak{o}$, also, wenn p die kleinste durch $\mathfrak{p}$ theilbare rationale ganze Zahl ist, $N(\mathfrak{p}) = p^f$. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, dass $p > 2$ und nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar ist. (Letzteres tritt nur ein, wenn die Primzahl p in der Discriminante des Körpers aufgeht).

Sind A und B Zahlen der Ordnung $\mathfrak{o}$ und ist $A - B = P$, so ist nach dem binomischen Satze $A^p \equiv B^p + P^p$ (mod. p), also auch (mod. $\mathfrak{p}$). Ist P nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar, so ist auch P^p nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar. Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses ergiebt sich der Satz:

I. *Ist $A - B$ nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar, so ist auch $A^{p^\mu} - B^{p^\mu}$ nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar.*

Ist $A - B = P$, so ist

$$A^m = B^m + m B^{m-1} P + \frac{m(m-1)}{1.2} B^{m-2} P^2 + \cdots + P^m.$$

Ist P genau durch $\mathfrak{p}^\lambda$ theilbar (d. h. durch $\mathfrak{p}^\lambda$ und nicht durch $\mathfrak{p}^{\lambda+1}$), wo $\lambda > 0$, und sind A und B nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar, so ist, falls m nicht durch p theilbar ist,

$$A^m \equiv B^m \text{ (mod. } \mathfrak{p}^\lambda) \text{ und } A^m \equiv B^m + m B^{m-1} P \text{ (mod. } \mathfrak{p}^{\lambda+1});$$

daher ist $A^m - B^m$ durch $\mathfrak{p}^\lambda$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^{\lambda+1}$ theilbar. Ist dagegen $m = p$, so ist

$$A^p \equiv B^p \text{ (mod. } \mathfrak{p}^{\lambda+1}) \text{ und } A^p \equiv B^p + p B^{p-1} P \text{ (mod. } \mathfrak{p}^{\lambda+2});$$

daher ist $A^p - B^p$ durch $\mathfrak{p}^{\lambda+1}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^{\lambda+2}$ theilbar (dieses würde nicht richtig sein, wenn $p = 2$ oder durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar wäre). Indem man diesen Schluss wiederholt anwendet und mit dem vorigen combinirt, erhält man den Satz:

II. *Ist $A - B$ genau durch $\mathfrak{p}^\lambda$ $(\lambda > 0)$ theilbar, während A und B nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar sind, und ist m genau durch p^μ theilbar, so ist $A^m - B^m$ genau durch $\mathfrak{p}^{\lambda+\mu}$ theilbar.*

---

*) Ueber die Begriffe und Sätze, von denen wir hier Gebrauch machen, vergleiche man die Arbeiten des Herrn *Dedekind*:

Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune-Dirichlet, 2. Aufl., Supplem. 10;

Sur la théorie des nombres entiers algébriques (*Darboux*, bulletin 1re sér. t. XI et 2e sér. t. I);

Ueber die Anzahl der Idealklassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers, Braunschweig 1877.

Jede Zahl A der Ordnung $\mathfrak{o}$, welche nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, genügt der Congruenz $A^{p^f-1} \equiv 1$ (mod. p). Nach Satz II ist daher $A^{(p^f-1)p^{\mu-1}} \equiv 1$ (mod. $\mathfrak{p}^\mu$). Es giebt ferner Zahlen B der Ordnung $\mathfrak{o}$, welche (mod. $\mathfrak{p}$) zum Exponenten p^f-1 gehören, primitive Wurzeln des Primideals $\mathfrak{p}$. Unter den Zahlen A, welche der Congruenz $A \equiv B$ (mod. $\mathfrak{p}$) genügen, giebt es auch solche, für welche $A^{p^f-1}-1$ nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar ist. Denn erfüllt B selber diese Bedingung nicht, und ist P durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar, so wird dieselbe durch $A = B + P$ befriedigt. Denn es ist

$$(B+P)^{p^f-1} - 1 = B^{p^f-1} - 1 + (p^f-1)\, B^{p^f-2} P + \binom{p^f-1}{2} B^{p^f-3} P^2 + \cdots$$
$$\equiv (p^f-1)\, B^{p^f-2} P \ (\text{mod. } \mathfrak{p}^2),$$

und mithin ist diese Zahl nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar.

Ist nun A eine primitive Wurzel von $\mathfrak{p}$, für welche $A^{p^f-1}-1$ genau durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, so ist $A^{(p^f-1)p^\lambda}-1$ genau durch $\mathfrak{p}^{\lambda+1}$ theilbar, also nur und stets dann durch $\mathfrak{p}^\mu$, wenn $\lambda \geqq \mu-1$ ist. Daher ist $(p^f-1)p^{\mu-1}$ durch den Exponenten e, zu welchem A in Bezug auf den Modul $\mathfrak{p}^\mu$ gehört, theilbar. Ferner ist dieser Exponent e, da $A^e \equiv 1$ (mod. $\mathfrak{p}^\mu$), also auch (mod. $\mathfrak{p}$), und da A eine primitive Wurzel von $\mathfrak{p}$ ist, durch p^f-1 theilbar. Mithin ist $e = (p^f-1)d$, wo d ein Divisor von $p^{\mu-1}$, also eine Potenz von p und folglich gleich $p^{\mu-1}$ ist. Demnach gehört A nach dem Modul $\mathfrak{p}^\mu$ zum Exponenten $(p^f-1)p^{\mu-1}$. Umgekehrt muss das Element A, wie leicht zu beweisen, wenn es nach dem Modul $\mathfrak{p}^\mu$ zum Exponenten $(p^f-1)p^{\mu-1}$ gehört, eine solche primitive Wurzel von p sein, für welche $A^{p^f-1}-1$ nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar ist.

Die Anzahl der Klassen von Zahlen, welche (mod. $\mathfrak{p}^\mu$) incongruent und relativ prim zu $\mathfrak{p}^\mu$ sind, ist gleich

$$h = (p^f-1)\, p^{(\mu-1)f}.$$

Dieselben bilden eine Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Rang r und deren normale Invarianten $e_1, e_2 \ldots e_r$ seien. Der grösste Exponent, zu welchem irgend eine Zahl von $\mathfrak{H}$ gehört, ist gleich

$$e_1 = (p^f-1)\, p^{\mu-1}.$$

Da nun $e_1 e_2 \ldots e_r = h$ ist, so ist folglich

$$e_2 e_3 \ldots e_r = p^{(\mu-1)(f-1)},$$

also ist e_ϱ ($\varrho > 1$) eine Potenz von p, deren Exponent, weil e_ϱ in e_1 aufgeht, kleiner oder gleich $\mu - 1$ ist.

Ist $X-1$ nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar, so ist auch X^p-1 nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar; ist $X-1$ genau durch $\mathfrak{p}^{\mu-\lambda}$ theilbar ($\mu > \lambda$), so ist X^p-1 genau durch $\mathfrak{p}^{\mu-\lambda+1}$ theilbar; damit daher X^p-1 durch $\mathfrak{p}^\mu$ ($\mu > 1$) theilbar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $X-1$ durch $\mathfrak{p}^{\mu-1}$ theilbar ist. Die Anzahl der Zahlen Y, welche durch $\mathfrak{p}^{\mu-1}$ theilbar und (mod. $\mathfrak{p}^\mu$) incongruent sind, ist gleich

$$(\mathfrak{p}^{\mu-1}, \mathfrak{p}^\mu) = \frac{N(\mathfrak{p}^\mu)}{N(\mathfrak{p}^{\mu-1})} = N(\mathfrak{p}) = p^f.$$

Die Anzahl der (mod. $\mathfrak{p}^\mu$) incongruenten Zahlen, welche $\equiv 1$ (mod. $\mathfrak{p}^{\mu-1}$) sind, ist daher ebenfalls gleich p^f, und folglich hat die Congruenz $X^p - 1 \equiv 0$ (mod. $\mathfrak{p}^\mu$) genau p^f incongruente Wurzeln. Da aber e_r durch p theilbar ist, so muss diese Congruenz nach §. 7 p^r verschiedene Wurzeln haben, und folglich ist $r = f$. Demnach ist

$$e_2 e_3 \dots e_r = (p^{\mu-1})^{r-1}, \quad e_\varrho \overline{\gtrless} p^{\mu-1} \; (\varrho > 1).$$

Wäre daher auch nur für einen einzigen Werth von ϱ die Invariante $e_\varrho < p^{\mu-1}$, so könnte jene Gleichung nicht stattfinden. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ ist also vom Range f und ihre Invarianten sind

$$(1.) \qquad e_1 = (p^f - 1)\, p^{\mu-1}, \; e_2 = p^{\mu-1} \dots e_f = p^{\mu-1}.$$

Ohne die allgemeine Theorie der Gruppen zu benutzen, kann man dieses Resultat auch folgendermassen ableiten (vgl. *Lejeune-Dirichlet*, Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen, §. 2; Abh. der Berl. Akad. 1841). Die Anzahl der Zahlen, welche durch $\mathfrak{p}$ theilbar und (mod. $\mathfrak{p}^2$) incongruent sind, ist gleich $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2) = p^f$. Sei P_1 eine solche durch $\mathfrak{p}^2$ nicht theilbare Zahl und x eine rationale ganze Zahl; damit dann xP_1 durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass x durch $\mathfrak{p}$, also auch durch p theilbar ist, weil p die kleinste rationale Zahl ist, in der $\mathfrak{p}$ aufgeht. Die Congruenz $xP_1 \equiv yP_1$ (mod. $\mathfrak{p}^2$) findet folglich nur und stets dann Statt, wenn $x \equiv y$ (mod. p) ist. Durchläuft also x alle rationalen ganzen Zahlen, so stellt xP_1 genau p Zahlen dar, welche (mod. $\mathfrak{p}^2$) incongruent sind, und man erhält dieselben, indem man x ein

vollständiges Restsystem (mod. p) durchlaufen lässt. Ist $f=1$, so sind dies alle Klassen von Zahlen, welche durch $\mathfrak{p}$ theilbar und (mod. $\mathfrak{p}^2$) incongruent sind. Ist aber $f>1$, so sei P_2 eine weitere Zahl von dieser Beschaffenheit. Dann kann die Congruenz $x_1 P_1 + x_2 P_2 \equiv 0$ (mod. $\mathfrak{p}^2$) nur bestehen, wenn x_1 und x_2 beide durch p theilbar sind. Denn wäre x_2 nicht durch p theilbar und $x_2 a + 1 \equiv 0$ (mod. p), so wäre auch $0 \equiv a x_1 P_1 + a x_2 P_2 \equiv a x_1 P_1 - P_2$ (mod. $\mathfrak{p}^2$), während doch P_2 nicht von der Form $x P_1$ ist. Mithin ist x_2 durch p theilbar, also $x_1 P_1 \equiv - x_2 P_2 \equiv 0$ (mod. $\mathfrak{p}^2$), und daher auch x_1 durch p theilbar. Wenn also jede der Zahlen x_1, x_2 ein vollständiges Restsystem (mod. p) durchläuft, so stellt der Ausdruck $x_1 P_1 + x_2 P_2$ genau p^2 Zahlen dar, welche durch $\mathfrak{p}$ theilbar und (mod. $\mathfrak{p}^2$) incongruent sind. Ist $f>2$, so sei P_3 eine weitere solche Zahl, welche nicht in dieser Form enthalten ist, u. s. w. Auf diesem Wege gelangt man zu einem System von f durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbaren Zahlen $P_1, P_2 \dots P_f$, zwischen denen die Relation

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_f P_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$$

nur bestehen kann, wenn $x_1, x_2 \dots x_f$ sämmtlich durch p theilbar sind. Durchläuft also jede der Zahlen $x_1, x_2 \dots x_f$ ein vollständiges Restsystem nach dem Modul p, so stellt der Ausdruck $x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_f P_f$ alle p^f durch $\mathfrak{p}$ theilbaren Zahlen dar, welche (mod. $\mathfrak{p}^2$) incongruent sind*).

Nun ist oben gezeigt worden, dass es eine Zahl H giebt, welche (mod. $\mathfrak{p}^\mu$) zum Exponenten $(p^f-1)p^{\mu-1}$ gehört. Setzt man $H^{p^f-1} = H_1$,

*) Bilden $A_1, A_2 \dots A_n$ eine Basis des Moduls $\mathfrak{p}$ und $B_1, B_2 \dots B_n$ eine Basis des Moduls $\mathfrak{p}^2$, so kann man, weil $\mathfrak{p}^2$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, n^2 (völlig bestimmte) rationale ganze Zahlen $a_{\alpha\beta}$ finden, welche den Gleichungen

$$B_\alpha = a_{\alpha 1} A_1 + a_{\alpha 2} A_2 + \cdots + a_{\alpha n} A_n \qquad (\alpha = 1, 2 \dots n)$$

genügen. Die Determinante dieser Zahlen ist

$$|a_{\alpha\beta}| = \frac{N(\mathfrak{p}^2)}{N(\mathfrak{p})} = p^f.$$

Nach den obigen Erörterungen sind die Elementartheiler dieser Determinante $e_1 = p, \dots e_f = p$, $e_{f+1} = 1 \dots e_n = 1$. Man kann daher (*Frobenius* l. c. S. 158.) durch unimodulare Substitutionen die Basis $A_1, A_2 \dots A_n$ in eine Basis $P_1, P_2 \dots P_n$ von $\mathfrak{p}$ und die Basis $B_1, B_2 \dots B_n$ in eine Basis $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ von $\mathfrak{p}^2$ so umformen, dass

$$Q_1 = p P_1, \dots Q_f = p P_f; \; Q_{f+1} = P_{f+1}, \dots Q_n = P_n$$

ist.

so ist $H_1 - 1$ durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar, kann also in der obigen Entwicklung für die Zahl P_1 genommen werden. Zu dieser bestimme man die Zahlen $P_2, P_3 \dots P_f$ so, dass die Congruenz $x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_f P_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ nur stattfinden kann, wenn $x_1, x_2 \dots x_f$ sämmtlich durch p theilbar sind, und setze $H_\varrho = 1 + P_\varrho$. Da $H_\varrho - 1$ genau durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, ist $H_\varrho^{p^\lambda} - 1$ genau durch $\mathfrak{p}^{\lambda+1}$, also nur und stets dann durch $\mathfrak{p}^\mu$ theilbar, wenn $\lambda \geqq \mu - 1$ ist. Daher ist der Exponent, zu welchem $H_\varrho \pmod{\mathfrak{p}^\mu}$ gehört, ein Divisor von $p^{\mu-1}$, also eine Potenz von p, und folglich gleich $p^{\mu-1}$. Wir behaupten ferner, dass die Congruenz

$$(2.) \qquad H^v H_2^{v_2} \dots H_f^{v_f} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\mu}$$

nur bestehen kann, wenn jeder Factor der linken Seite für sich $\equiv 1$ ist. Denn wenn diese Congruenz $\pmod{\mathfrak{p}^\mu}$ besteht, so muss sie auch $\pmod{\mathfrak{p}}$ gelten, und weil $H_2 \equiv \dots \equiv H_f \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, so ist folglich $H^v \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$, also, da $H \pmod{\mathfrak{p}}$ zum Exponenten $p^f - 1$ gehört, $v = (p^f - 1) v_1$, und mithin

$$(3.) \qquad H_1^{v_1} H_2^{v_2} \dots H_f^{v_f} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\mu}.$$

Diese Congruenz kann aber nur bestehen, wenn $v_1, v_2 \dots v_f$ sämmtlich durch $p^{\mu-1}$ theilbar sind. Denn sei $p^{\mu-\lambda}$ die höchste Potenz von p, welche in allen diesen Zahlen aufgeht, und sei v_ϱ gleich $p^{\mu-\lambda} x_\varrho$, wo $x_1, x_2 \dots x_f$ nicht sämmtlich durch p theilbar sind. Dann muss nach Satz I und II

$$(4.) \qquad H_1^{x_1} H_2^{x_2} \dots H_f^{x_f} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\lambda}$$

sein. Nun ist aber nach dem binomischen Satze

$$H_\varrho^{x_\varrho} \equiv (1 + P_\varrho)^{x_\varrho} \equiv 1 + x_\varrho P_\varrho \pmod{\mathfrak{p}^2}$$

und daher

$$H_1^{x_1} H_2^{x_2} \dots H_f^{x_f} \equiv (1 + x_1 P_1)(1 + x_2 P_2) \dots (1 + x_f P_f)$$
$$\equiv 1 + x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_f P_f \pmod{\mathfrak{p}^2}.$$

Wäre nun $\lambda > 1$, so wäre zufolge der Congruenz (4.)

$$H_1^{x_1} H_2^{x_2} \dots H_f^{x_f} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^2},$$

und mithin wäre

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_f P_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2};$$

das ist aber nicht möglich, wenn x_1, $x_2 \dots x_f$ nicht sämmtlich durch p theilbar sind.

Da H zum Exponenten $(p^f - 1)p^{\mu-1}$ und H_ϱ zum Exponenten $p^{\mu-1}$ gehört, und da die Congruenz (2.) nur bestehen kann, wenn v durch $(p^f - 1)p^{\mu-1}$ und v_ϱ durch $p^{\mu-1}$ theilbar ist, so stellt der Ausdruck

$$H^{x} H_2^{x_2} \dots H_f^{x_f},$$

falls x_1, x_2, ... x_f alle rationalen ganzen Zahlen durchlaufen, genau $(p^f - 1)\, p^{(\mu-1)f}$, also sämmtliche Klassen von Zahlen dar, welche (mod. $\mathfrak{p}^\mu$) incongruent und durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbar sind. Mithin bilden H, $H_2 \dots H_f$ eine normale Basis der Gruppe $\mathfrak{H}$, und die Zahlen (1.) sind die Invarianten dieser Gruppe.

Zürich, Juli 1878.

Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

(Von Herrn *E. Netto.*)

Im 84. Bande dieses Journals hat Herr *G. Cantor* nachgewiesen, dass eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen und eine solche von m Dimensionen unter gegenseitiger Eindeutigkeit auf einander bezogen werden können. Es wird also in Folge dieses interessanten Resultates der Ausspruch *Riemanns*: „dass die Ortsbestimmung in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen zurückgeführt sei" einer Präcisirung unterliegen müssen. Diese bietet sich leicht in der Hinzunahme der Stetigkeit zur eindeutigen Beziehung dar, und in der That haben auch die Herren *Lüroth*, *Jürgens* und *Thomae* von dieser Seite her den Beweis für die Unmöglichkeit eindeutiger und stetiger Beziehung zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen geliefert. Es beziehen sich aber die Beweise der Herren *Lüroth* und *Jürgens* nur auf die einfachsten Fälle, auf die Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Dimension in solche der ersten oder zweiten; das gemeinsame Princip der Beweise scheint in den weiteren Fällen nur schwer anwendbar zu sein. Der Beweis des Herrn *Thomae* geht freilich auf den allgemeinen Satz, doch enthält er zwei Voraussetzungen, deren Richtigkeit nicht ohne weiteres ersichtlich scheinen möchte: Bedenken, welche Herr *Lüroth* bereits hervorgehoben hat. Es soll nun im Folgenden gleichfalls ein allgemeiner Beweis versucht werden, der auf ganz anderen Voraussetzungen beruht, als die oben erwähnten. Gehen nämlich die obigen Demonstrationen davon aus, die Stetigkeit der Beziehung zu Grunde zu legen, und daraus die Existenz der Mehrdeutigkeit zu folgern, so soll hier aus gleichzeitiger Annahme der Eindeutigkeit und der Stetigkeit ein Widerspruch gegen die letztere Eigenschaft, d. h. gegen die Stetigkeit gefolgert werden.

1. Eine eindeutige Beziehung zwischen einer einfachen Mannigfaltigkeit M_1, einer Linie, und einer nullfachen M_0, einem Punkte, ist nicht möglich. Daraus folgt dieselbe Unmöglichkeit für die Abbildung von M_n $(n > 1)$ auf M_0.

2. Eine stetige zweifache Mannigfaltigkeit M_2 sei eindeutig auf eine einfache Mannigfaltigkeit M_1 abgebildet. Dann denken wir uns in M_2 eine einfache geschlossene Linie $\mathfrak{A}$ gezogen und betrachten deren Abbild A in M_1. Nach (1.) kann A kein Punkt sein; es wird also ein bestimmtes Stück der Linie M_1 werden. A wird von M_1 verschieden sein, da die Linie $\mathfrak{A}$ jedenfalls als von M_2 verschieden angesehen werden kann. Wir betrachten auf M_1 einen im Innern von A gelegenen Punkt; dann kann man von diesem nicht auf stetigem Wege zu einem anderen nicht zu A gehörigen Punkte von M_1 gelangen, ohne einen gewissen Grenzpunkt (oder einen von zwei solchen Grenzpunkten) zu überschreiten. Diesem einen Grenzpunkte α_1 (oder diesen beiden Grenzpunkten α_1, α_2) entsprechen nach (1.) in M_2 und auf $\mathfrak{A}$ auch nur Punkte, a_1 (resp. a_1, a_2). Wäre nun die Abbildung von M_2 auf M_1 stetig, so könnte man auch in M_2 von einem Punkte des Gebildes $\mathfrak{A}$ nur zu einem andern nicht $\mathfrak{A}$ angehörigen Punkte kommen, wenn man a_1 (resp. a_1 oder a_2) überschritte; denn in M_1 findet das Entsprechende statt. Das ist aber nicht der Fall: jeder Punkt der Linie $\mathfrak{A}$ grenzt in der Fläche M_2 unmittelbar an Punkte, die nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören. Daraus folgt, dass die eindeutige Abbildung keine stetige Beziehung zur Folge haben kann. Dasselbe gilt dann, wie unmittelbar zu erkennen ist, von der Abbildung jeder Mannigfaltigkeit M_n $(n > 2)$ auf M_1.

3. Eine stetige dreifache Mannigfaltigkeit M_3 sei eindeutig und stetig auf eine stetige zweifache Mannigfaltigkeit M_2 abgebildet. Dann wählen wir in M_3 eine beliebige Fläche $\mathfrak{A}$ und bilden diese auf M_2 als Flächenstück A gemäss (2.) ab. Das Flächenstück A wird gegen den übrigen Theil von M_2 durch eine oder mehrere Curven $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ begrenzt, und es ist nicht möglich, von einem Punkte in A (der nicht zu diesen Grenzcurven gehört) zu einem ausserhalb A gelegenen Punkte auf stetigem Wege zu gelangen, ohne eine der Curven $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zu überschreiten. Diesen Grenzcurven entsprechen in M_3 auf $\mathfrak{A}$ nach (2.) wieder

Curven $a_1, a_2, \ldots$, und wenn die Abbildung wirklich stetig wäre, dürfte man auch hier von keinem Punkte auf $\mathfrak{A}$ nach einem anderen nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Punkte von M_3 gelangen können, ohne eine der Curven $a_1, a_2, \ldots$ zu überschreiten. Das ist aber nicht der Fall, da im Raume jeder Punkt einer Fläche unmittelbar an andere nicht zur Fläche gehörige Punkte des Raumes grenzt. Es folgt also wie oben, dass eine eindeutige, stetige Abbildung eines Gebildes M_n $(n \geqq 3)$ auf ein Gebilde M_2 nicht möglich ist.

4. Das Prinzip dieser Beweise ist folgendes: „In einer Mannigfaltigkeit νten Grades wird jedes Gebilde νten Grades durch ein anderes von geringerem Grade begrenzt; in einer Mannigfaltigkeit $(\nu+1)$ten Grades fällt jedes Gebilde νten Grades mit seiner Grenze zusammen". In den Fällen $\nu = 1, 2$ ergab sich dies allenfalls aus der Anschauung; im allgemeinen Falle muss zu strenger Begründung auch der Begriff eines Gebildes νter Dimension, eines Punktes im Innern oder auf der Grenze eines Gebildes u. s. w. festgestellt werden. Wir verfahren dabei folgendermassen:

A) Im Raume von $m \geqq n$ Dimensionen sei ein durch die Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_m$ bestimmtes Gebilde gegeben. Es werde in ihm ein dem Punkte $x_1, x_2, \ldots x_m$ benachbarter Punkt $x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, \ldots x_m + \delta_m$ ausgewählt. Die δ mögen durch passende lineare Transformation der x sämmtlich von Null verschieden gemacht sein. Ergeben sich durch die Festsetzung von n der Incremente z. B. $\delta_1' < \delta_1, \delta_2' < \delta_2, \ldots \delta_n' < \delta_n$ die übrigen $\delta_{n+1}, \ldots \delta_m'$ im allgemeinen eindeutig, so heisse das Gebilde *von der nten Dimension.* Findet eine mehrdeutige Bestimmung der $m-n$ nicht festgesetzten Incremente nur auf einer endlichen Anzahl von Gebilden niederer Dimension statt, so heisse das Gebilde *regulär.*

B) Für den Punkt $x_1, x_2, \ldots x_m$ eines Gebildes $n$ter Dimension $(m \geqq n)$ sei es möglich, n der Coordinaten so auszuwählen, dass, wenn man ihren Incrementen dem absoluten Werthe nach hinreichend kleine, sonst aber beliebige positive, verschwindende oder negative Werthe beilegt, jedem solchen Systeme ein Punkt desselben Gebildes entspricht. Dann sagen wir: der Punkt $x_1, x_2, \ldots x_m$ liegt *im Innern*

des Gebildes. Aus A) ergiebt sich $x_1 + \frac{\delta_1}{2}, \dots x_m + \frac{\delta_m}{2}$ als ein solcher Punkt.

Ein Punkt $x_1, x_2, \dots x_m$ liegt *auf der Grenze zweier Gebilde* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$, wenn ihm beliebig nahe noch Punkte im Innern von $\mathfrak{A}$ und Punkte im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen.

C) Kann man von jedem Punkte eines Gebildes zu einem bestimmten Punkte desselben Gebildes und folglich auch zu jedem anderen auf einer Linie gelangen, die ganz dem Gebilde angehört, so heisse dasselbe *zusammenhängend*.

D) Aus einer n-fachen Mannigfaltigkeit M_n schneiden wir ein Gebilde $n$ter Dimension $\mathfrak{A}$ aus, welcher mit dem Reste $\mathfrak{B}$ von M_n keinen Punkt gemein hat. Wäre die Grenze $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichfalls von der $n$ten Dimension, so könnte man nach A) und B) einen Punkt im Innern von $\mathfrak{G}$ wählen, für den z. B. $x_1, x_2, \dots x_n$ beliebige Incremente haben könnten, falls sie sämmtlich dem absoluten Werthe nach kleiner als die endliche Grösse δ sind. Nach der Definition der Grenze liegt dem $x_1, \dots x_m$ beliebig nahe ein Punkt $y_1 = x_1 + \varepsilon_1, \dots y_n = x_n + \varepsilon_n, \dots$ im Innern von $\mathfrak{A}$; wir können also $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n < \frac{\delta}{2}$ machen; dann liegt $y_1, y_2, \dots y_m$ im Innern von $\mathfrak{A}$ und auch noch im Innern von $\mathfrak{G}$. Es giebt also nach B) eine endliche Grenze ζ, unterhalb deren man die Incremente z. B. von $y_1, y_2, \dots y_n$ annehmen kann, ohne dass man das Innere von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{G}$ verlässt. Da $y_1, \dots y_m$ im Innern von $\mathfrak{G}$ liegt, so giebt es nach B) in beliebiger Nähe noch Punkte, die zum Innern von $\mathfrak{B}$ gehören, z. B. $y_1 + \vartheta_1, y_2 + \vartheta_2, \dots y_m + \vartheta_m$, und man kann die ϑ beliebig klein, also auch kleiner als ζ machen. Der so erhaltene Punkt $y_1 + \vartheta_1, \dots y_m + \vartheta_m$ liegt dann gleichzeitig im Innern von $\mathfrak{A}, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}$. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keinen Punkt gemein haben. Dass es wirklich zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Grenzpunkte und in $\mathfrak{G}$ Punkte im Innern giebt, folgt leicht aus A), B).

Hieraus ergiebt sich, dass die Grenze zweier wesentlich verschiedener Gebilde derselben $n$ten Dimension von niederer als dieser Dimension ist. Denn da die Grenze beiden Gebilden angehört, kann sie nicht von höherer Dimension sein, und da beide Gebilde bei

gleicher Dimension mit der Grenze nach dem eben Bewiesenen Punkte im Innern gemein hätten, so könnten sie nicht wesentlich verschieden sein.

E. Um nun den allgemeinen Satz zu beweisen, nehmen wir an, wir wüssten bereits, dass ein Gebilde νter Dimension für $\nu \leqq n-1$ nur dann auf ein anderes der ν'ten ($\nu' \leqq n-1$) eindeutig und stetig abgebildet werden kann, wenn dasselbe gleichfalls von der νten Dimension, also $\nu' = \nu$ ist. Es soll nun derselbe Satz für ν, $\nu' \leqq n$ bewiesen werden. Hierbei erkennt man zuerst, dass ein Gebilde $n$ter Dimension nicht eindeutig und stetig auf ein solches von geringerer als der $(n-1)$ten Dimension bezogen werden kann. Denn man kann in dem ersteren eine Mannigfaltigkeit $(n-1)$ter Dimension aufstellen, der in dem zweiten eine solche von geringerer Dimension entspräche; dies streitet gegen die Voraussetzung. Es ist also nur die Unmöglichkeit einer Abbildung von M_n auf M_{n-1} nachzuweisen.

Wir betrachten im Innern von M_n einen regulären Punkt, dessen Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_m$ ($m \geqq n$) sein mögen. Da derselbe im Innern von M_n liegt, so giebt es n Coordinaten z. B. $x_1, x_2, \ldots x_n$ derart, dass ihnen beliebige Incremente $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ beigelegt werden können, falls sie nur ihrem absoluten Werthe nach kleiner als eine hinreichend kleine, aber von Null verschiedene Grösse d sind; da der Punkt regulär ist, so wird durch $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n < d$ immer nur ein System $\delta_{n+1}, \ldots \delta_m$, also auch nur ein einziger Punkt bestimmt. Wir nehmen nun der bequemeren Bezeichnung wegen $x_1, \ldots x_m$ zum Coordinaten-Anfang. Dann bildet die Gesammtheit der Punkte von M_n, welche der Gleichung $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = d^2$ genügen, ein stetiges und zusammenhängendes Gebilde $\mathfrak{A}$ der $(n-1)$ten Dimension; die Gesammtheit der Punkte von M_n, für die $\delta_1^2 + \cdots + \delta_n^2 < d^2$ ist, ein stetiges und zusammenhängendes Gebilde $\mathfrak{B}$ der $n$ten Dimension. Jetzt bilden wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als A und B auf M_{n-1} ab; dann sind A wie B den Voraussetzungen nach von der $(n-1)$ten Dimension. $\mathfrak{A}$ ist in allen Punkten seine eigene Grenze gegen $\mathfrak{B}$; denn von $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$, einem Punkte von $\mathfrak{A}$, kommt man durch $\delta_1 - \lambda, \delta_2, \ldots \delta_m$ für jedes beliebig kleine, positive, von Null verschiedene λ auf Punkte im Innern von $\mathfrak{B}$. (Alle diese Eigenschaften sind analytisch ohne weiteres nachweisbar.)

Man muss also auch von jedem Punkte von A in gleicher Weise ins Innere von B kommen können. A ist also mit seiner Grenze G gegen B identisch, d. h. auch von der $(n-1)$ten Dimension; hierdurch ersieht man, es sei B von gleicher Dimension mit seiner Grenze G gegen A; also haben A und B Punkte im Innern gemeinsam. Dieser Umstand steht im Widerspruch zu der Beziehung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu einander. Eine stetige und eindeutige Abbildung ist also nicht möglich, sobald die Gebilde von ungleicher Dimension $\leqq n$ sind.

Berlin im October 1878.

Verallgemeinerung eines Poncelet'schen Satzes.

(Von Herrn *S. Kantor* in Wien.)

---

1. Einer der interessantesten Sätze aus der Theorie der Kegelschnitte ist der, dass die sechs Ecken zweier einer C_2 umschriebenen Dreiseite allemal auf einer neuen C_2 liegen. Der diesem reciproke und wie dieser von *Poncelet* herrührende Satz lautet: Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben, so sind sie jedesmal auch einem Kegelschnitte umschrieben. Der Zusammenhang dieser Eigenschaften mit der Theorie der cubischen Punkt- und Tangenteninvolutionen an C_2 wurde von Herrn *Weyr* klar gelegt und vielfältig benutzt. Wie im folgenden gezeigt werden soll, lassen sich diese Sätze auf beliebige einer C_2 umschriebene n-Seite und eingeschriebene n-Ecke verallgemeinern*).

2. Es seien einem Kegelschnitte C_2 ein Vierseit $g_1\,g_2\,g_3\,g_4$ und ein Dreiseit $g'_1\,g'_2\,g'_3$ umschrieben, welche zusammen neun Eckpunkte besitzen. Nun sind nach Art. 1 die Dreiecke $g_1\,g_2\,g_3$ und $g'_1\,g'_2\,g'_3$ einem Kegelschnitte eingeschrieben und die Dreiecke $g_2\,g_3\,g_4$ und $g'_1\,g'_2\,g'_3$ einem anderen. Es bilden daher der letztere Kegelschnitt mit der Geraden g_4 und der erste zusammen mit g_1 zwei Curven dritter Ordnung, welche beide jene neun Eckpunkte enthalten. Also folgt:

„Die neun Eckpunkte bilden die Scheitel eines Curvenbüschels dritter Ordnung. Oder: Alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht von den neun Punkten gehen, enthalten auch den neunten“.

In dem eben erhaltenen Büschel C_3 giebt es vier uneigentliche (zerfallende) Curven dritter Ordnung, von denen jede aus einer Seite des

---

*) In einer Abhdg.: „Ueber Involutionen höherer Ordnung“ (dieses J. Bd. 72) erhält zwar Herr *Weyr* mehrere wesentliche der hier folgenden Resultate, allein da sein Ausgangspunkt (die Theorie der Involution) von dem meinigen verschieden ist, habe ich diese Arbeit, welche auch einiges Neue enthält, veröffentlichen zu dürfen geglaubt.

Vierseites und dem Kegelschnitte besteht, welchem das übrig bleibende Dreieck g und das feste Dreieck g' eingeschrieben sind. Von diesen vier Kegelschnitten lässt sich noch ein bestimmter Satz aussprechen:

„Das Doppelverhältniss derselben in einem ihrer Schnittpunkte $g' g'$ ist gleich dem Doppelverhältnisse, welches $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$ an dem Kegelschnitte C_2 besitzt*)." Reciprok: „Die neun Seiten eines der C_2 eingeschriebenen Vierecks und Dreiecks bilden die Basistangenten eines Curvenbüschels dritter Klasse."

„Die Berührungspunkte einer Seite des Dreiecks mit den vier Kegelschnitten, die es mit den vier Dreiecken des Vierecks bestimmt, haben dasselbe Doppelverhältniss wie die vier Ecken des Vierecks auf C_2."

Die zerfallenden Curven des Büschels haben im Ganzen acht Doppelpunkte; zwölf müssen ihrer vorhanden sein, daher:

„In einem Büschel C_3 (C^3) der angegebenen Art giebt es vier eigentliche Curven mit Doppelpunkt (Doppeltangente)."

3. Ziehen wir nun eine bestimmte Curve des Büschels in Betracht, so finden wir von ihr auf der Geraden g'_1 einen dritten Schnittpunkt c. Zufolge Art. 2 ergiebt sich aber, dass die zweite von c an C_2 gelegte Tangente jede der beiden Geraden g'_2 und g'_3 in einem Punkte der Curve treffen muss, folglich: Die einzelnen Curven des Büschels treffen die Seiten des Dreieckes $g'_1\, g'_2\, g'_3$ in je drei Punkten, welche auf einer Tangente von C_2 liegen. Den einzelnen Curven des Büschels entsprechen die Tangenten von C_2 projectiv. Dieses Resultat können wir anders mit den Worten ausdrücken: „Sind der C_2 irgend zwei Vierseite umschrieben, so giebt es stets eine Curve dritter Ordnung, welche die zwölf Eckpunkte der beiden Vierseite enthält." Die Beziehung dieser Curve zur C_2 ist noch vollständiger. Schneidet man die Curve durch irgend eine Tangente von C_2, so erhält man vier Schnittpunkte. Die von ihnen aus an C_2 gelegten Tangenten treffen sich weiter in Punkten, welche nach dem in Art. 2 Gesagten ebenfalls der Curve angehören müssen, was nun zeigt, dass die gewählte Tangente von C_2 wieder Veranlassung zur Entstehung eines Vier-

*) Darunter versteht man bekanntlich das constante Doppelverhältniss, nach welchem irgend eine Tangente von C_2 durch die vier Tangenten g geschnitten wird.

seites giebt, dessen Ecken auf der Cubik liegen. Diese Tangente war allgemein gewählt, daher der Satz:

„Der cubischen Curve, welche die Ecken zweier der C_2 umschriebenen Vierseite enthält, lassen sich noch unendlich viele andere Vierseite einschreiben, deren Seiten ebenfalls die C_2 berühren.“

Alle diese Vierseite bilden an C_2 eine Tangenteninvolution vierten Grades. Denn ist eine Tangente gegeben, so sind die drei andern Tangenten der Involutionsgruppe durch die Schnittpunkte jener mit der cubischen Curve bestimmt. Erwähnenswerth ist, dass unter den Vierseiten dieser Involution drei sind, welche an C_2 harmonische Vierseite bilden.

Es reiht sich hier noch der folgende Satz an: „Die acht Seiten zweier einer cubischen Curve C_3 eingeschriebenen Vierseite desselben Systemes berühren stets einen Kegelschnitt. Demselben sind noch unendlich viele Vierseite umschrieben, welche ihre Ecken auf C_3 haben.“ Den Beweis hiefür lehren die Eigenschaften, dass die Gegenpunktepaare eines vollständigen Vierseites auf C_3 conjugirte Punktepaare sind und die Eckpunkte eines seiner Dreiecke das Berührungspunktetripel eines dreifach berührenden Kegelschnittes bilden und zwei solche Tripel stets auf einem Kegelschnitte liegen (*Cremona,* Introd. No. 150). Zu verwenden ist noch der *Poncelet*sche Satz aus Art. 1. (Man vgl. auch *Schröter*s Aufsatz, Math. Annalen Bd. V.)

4. Jede Curve C_3 des Büschels aus Art. 2 schneidet C_2 in sechs Punkten. Jede der sechspunktigen Gruppen ist durch irgend einen ihrer Punkte bestimmt und die Sextupel bilden daher eine Involution sechsten Grades auf dem Kegelschnitt. In einer solchen Involution giebt es zehn Doppelpunkte. Vier derselben sind die Berührungspunkte von g_1, g_2, g_3, g_4 mit C_2, also wird C_2 von sechs eigentlichen Curven des Büschels berührt.

Man findet, dass in jedem solchen Falle der Tangentialpunkt des Berührungspunktes ein Wendepunkt der Curve ist, indem nämlich die gemeinsame Tangente im Berührungspunkte für drei Seiten des Vierseites zu zählen ist. Die Wendetangente in diesem Wendepunkte ist dann ebenfalls eine Tangente von C_2. Also: C_2 wird von sechs eigentlichen Wendetangenten des Büschels berührt, und:

„Die von allen Wendetangenten des Büschels eingehüllte Curve ist von der neunten Klasse mit vier dreifachen Tangenten."

Hat die Curve in d einen Doppelpunkt, so müssen die von d an C_2 gelegten Tangenten, jede für zwei gezählt, als ein der Curve eingeschriebenes Vierseit gezählt werden. Also liegen die Berührungspunkte mit C_2 auf der Curve selbst (gemäss Art. 3).

Man kann, indem man die Punkte einer solchen C_3^4 mittelst Parameter auf die Doppelpunktstangenten bezieht, aus den, zwei gegebenen Vierseiten entsprechenden, Werthen die Parameter der zwei Schnittpunkte berechnen, in denen die an den eingeschriebenen Kegelschnitt von d ausgehenden Tangenten die C_3^4 treffen. Zu diesem Zwecke benutze ich die von Herrn *Weyr* in seinen „Geom. Mitth." (Sitzungsber. der kais. Ak. d. W. 68. Bd.) dargelegten Principien.

Die sechs Punkte des Vierseites T_1 seien $\pm\xi_1, \pm\xi_2, \pm\xi_3$, die des anderen $\pm\xi_1', \pm\xi_2', \pm\xi_3'$. Die dem T_1 entsprechende (sechspunktige) Involutionsgruppe auf C_3^4 ist dargestellt durch

$$x^6 + \alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x + \alpha_6 = 0.$$

Nun ist zufolge der Theorie der Gleichungen und der Werthe von ξ

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0,$$

also die erste Involutionsgruppe

$$x^6 + \alpha_2 x^4 + \alpha_4 x^2 + \alpha_6 = 0$$

und die zweite

$$x^6 + \alpha_2' x^4 + \alpha_4' x^2 + \alpha_6' = 0.$$

Darin ist

$$\alpha_2 = \Sigma\xi_i^2,\ \alpha_2' = \Sigma\xi_i'^2;\ \ \alpha_4 = \Sigma\xi_i^2\,\xi_j^2,\ \alpha_4' = \Sigma\xi_i'^2\,\xi_j'^2;$$

für α_6 hat man (l. c.) den Werth $-k^2$.

Irgend eine andere Involutionsgruppe ist dargestellt durch

$$x^6(1+\omega) + x^4(\alpha_2 + \alpha_2'\omega) + x^2(\alpha_4 + \alpha_4'\omega) + \alpha_6(1+\omega) = 0.$$

Soll der Doppelpunkt mit unter den Wurzeln sein, so muss $\omega = -1$ sein und dann wird sofort

$$x^2(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') = 0,$$

woraus zu sehen, dass wirklich der Doppelpunkt für vier Eckpunkte des

Vierseites gilt. Die beiden anderen sind einander conjugirt und sind die gesuchten zwei Schnittpunkte von C_2 mit C_3^4, nämlich

$$x = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_4 - \alpha_4'}{\alpha_2 - \alpha_2'}} = \pm \sqrt{-\frac{\Sigma \xi_i^2 \xi_j^2 - \Sigma \xi_i'^2 \xi_j'^2}{\Sigma \xi_i^2 - \Sigma \xi_i'^2}}.$$

5. Wir betrachten wieder die durch zwei Vierseite an C_2 bestimmte cubische Curve. Dieselbe schneidet C_2 in sechs Punkten a. Die in a an C_2 gezogene Tangente trifft C_3 in weiteren zwei Punkten b, b' und muss für die Involutionsgruppe, welcher sie angehört, zweifach gezählt werden. Die in b, b' an C_3 gezogenen Tangenten sind daher auch Tangenten an C_2 und schneiden sich auf der C_3. Ferner müssen diese Schnittpunkte c den einzelnen a im ersten Systeme (welchem nämlich alle Involutionsvierseite angehören) conjugirt sein und liegen daher (*Cremona*, Intr. No. 137) wieder auf einem Kegelschnitte. Ausserdem aber umhüllen die in c an C_3 gezogenen Tangenten ebenfalls einen Kegelschnitt. Im Vorhergehenden hat man also den Zusammenhang der den C_2 und C_3 gemeinsamen zwölf Tangenten mit den sechs Schnittpunkten a.

Die zwei Gegenpunkte eines der C_3 eingeschriebenen Vierseites haben denselben Tangentialpunkt und die drei Tangentialpunkte bestimmen eine Gerade, welche wir analog einer *Cremona*schen Bezeichnung die dem Vierseite beigeordnete Gerade (*retta satellite*) R nennen wollen. Welches ist dann die Einhüllende der allen Vierseiten an C_2 zugehörigen R? Um die Klasse dieser Einhüllenden zu finden, fragen wir, wie viele R durch den Punkt $g_1 g_2$ gehen.

Für jede dieser Geraden muss $g_1 g_2$ ein Tangentialpunkt des zugehörigen Vierseites sein. Nun ist er überhaupt Tangentialpunkt von vier Punkten und diese ordnen sich zweimal so zu einem Paare, dass die Punkte jedes Paares einander im ersten Systeme conjugirt sind. Jedes solche Paar ist ein Gegenpunktepaar eines Vierseites, welches, der C_2 umgeschrieben, auf C_3 liegt, und die Gerade R dieses Vierseites geht durch $g_1 g_2$; also da nur zwei solche Vierseite vorhanden sind, gehen durch $g_1 g_2$ eben nur zwei Gerade R. Dadurch ist aber bewiesen, dass die R eine Curve zweiter Classe, einen Kegelschnitt, einhüllen, welcher C_ν genannt werden möge.

Dieser Kegelschnitt hat mit C_2 vier Tangenten gemeinsam, $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3, \boldsymbol{R}_4$. Angenommen, es sei $\boldsymbol{T}_{12}$ ein Tangentialpunkt auf $\boldsymbol{R}_1$. Dann giebt es zwei Involutionsvierseite, denen die beigeordneten Geraden $\boldsymbol{R}_1$ und $\boldsymbol{R}'_2$ zugehören, welche durch $\boldsymbol{T}_{12}$ gehen. Ist nun $\boldsymbol{R}_1$ eine Tangente von C_2, so ist kein Grund, warum die ganz symmetrisch gegenüberstehende Gerade $\boldsymbol{R}'_2$ nicht auch C_2 berühren sollte, d. h. also die sechs Ecken des Vierseites $\boldsymbol{R}_1\,\boldsymbol{R}_2\,\boldsymbol{R}_3\,\boldsymbol{R}_4$ liegen auf C_3. Dieses Vierseit ist mithin der C_3 eingeschrieben, und daher muss der Kegelschnitt C_ν ebenfalls wie C_2 zu C_3 involutorisch liegen. Die Vierseite g an C_2 ordnen sich nach den Vierseiten $\boldsymbol{R}$ an C_ν, dessen einzelnen Seiten sie selbst zugehören, wieder in eine biquadratische Involution. Alles in Allem giebt dies den Satz:

„Sind auf einer cubischen Curve C_3 unendlich viele Vierseite beschrieben, welche sämmtlich denselben Kegelschnitt berühren, und construirt man zu jedem die beigeordnete Gerade $\boldsymbol{R}$, so umhüllen alle diese Geraden $\boldsymbol{R}$ einen Kegelschnitt C_ν, welcher auch zu C_3 involutorisch liegt und mit C_2 ein gemeinsames Tangentenvierseit auf C_3 besitzt."

Bemerkt sei noch, dass die Diagonaldreiecke sämmtlicher Vierseite um C_2 eine Curve dritter Classe einhüllen.

6. Man kann von der C_3, wenn sie durch die zwölf Punkte $g\,g$ und $g'\,g'$ gegeben ist, beliebig viele neue Punkte durch sehr einfaches Linienziehen finden. Verbindet man nämlich $g_1\,g_2$ (in einem Vierseite) mit einem Eckpunkte z. B. $g'_1 g'_2$ des anderen Vierseites, so ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit jener, welche $g_3\,g_4$ mit $g'_3\,g'_4$ verbindet, gleichzeitig der dritte Schnittpunkt beider mit C_3. Ferner treffen sich auch $(g_1\,g_2,\ g'_3\,g'_4)$ und $(g_3\,g_4,\ g'_1\,g'_2)$ in einem Punkte von C_3, welcher dem ersteren conjugirt ist. Derart kann man aus den g_i und g'_i neun conjugirte Punktepaare der Curve C_3 finden. Dieselben ordnen sich zu sechs neuen vollständigen Vierseiten und mittelst dieser theils unter einander, theils mit den früheren kann man wieder neue Punktepaare der C_3 construiren. Indem man so fortfährt, erhält man beliebig viele Punkte der C_3, wenn auch nicht in stetiger Aufeinanderfolge. — Die reciproke Construction übergehe ich.

7. Eine weitere Aufgabe bietet sich dar, wenn wir nochmals auf

den Curvenbüschel in Art. 2 zurückgehen. Dem dort gegebenen Grundvierseite $g_1 g_2 g_3 g_4$ entspricht in jeder der Curven des Büschels eine andere Gerade R. Man kann nun fragen, welche Curve von allen diesen Geraden R eingehüllt werde. Zur Beantwortung untersuchen wir, wie viele Gerade R durch den Punkt $g'_1 g'_2$ des ausserdem gegebenen Scheitel-dreieckes gehen. Es giebt eine einzige Curve, welche $(g_1 g_2, g'_1 g'_2)$ in $g_1 g_2$ berührt, und diese berührt stets auch $(g_3 g_4, g'_1 g'_2)$ in $g_3 g_4$, also geht die Gerade R des Vierseites g in Bezug auf diese Curve durch $g'_1 g'_2$. In gleicher Weise findet man zwei andere Curven, welche $(g_1 g_3, g'_1 g'_2)$ in $g_1 g_3$ oder $(g_1 g_4, g'_1 g'_2)$ in $g_1 g_4$ berühren und in Bezug auf welche mithin die Geraden R des Vierseits g ebenfalls durch $g'_1 g'_2$ gehen. Solcher giebt es also drei und nur drei, also gehen an die gesuchte Enveloppe von $g'_1 g'_2$ drei Tangenten, dieselbe „ist von der dritten Classe". Diese Curve dritter Classe berührt auch die vier Geraden g.

Wenn man die Wege verfolgt, welche die einzelnen Tangentialpunkte der Gegeneckenpaare $g_1 g_2$, $g_3 g_4$; $g_2 g_3$, $g_1 g_4$; $g_3 g_1$, $g_2 g_4$ beschreiben, so erhält man dafür (als die Erzeugnisse projectivischer Strahlbüschel) jene drei Kegelschnitte, welche durch die Eckpunkte von $g'_1 g'_2 g'_3$ und durch die drei Gegeneckenpaare des Vierseites selbst gehen. Diese drei Kegelschnitte werden von der Curve dritter Classe ebenfalls berührt.

8. Man kennt den Satz (cf. *Jacob Steiners* Vorlesungen, ed. *Schröter*), dass die drei Kegelschnitte, welche je zweien von drei eine C_2 berührenden Dreiecken umschrieben sind, sich in demselben Punkte schneiden. Es ist nun bemerkenswerth, dass sich auch dieser Satz in der bisher festgehaltenen Weise verallgemeinern lässt. Er lautet für Curven dritter Ordnung: „Sind drei Vierseite einer C_2 umgeschrieben, so liegen je zwei derselben auf einer Curve dritter Ordnung. Diese drei Curven C_3 schneiden sich ausserdem in denselben drei Punkten a_1, a_2, a_3.

Reciprok: „Sind drei Vierecke einer C_2 eingeschrieben, so liegen je zwei derselben so, dass sie eine Curve dritter Classe berühren. Diese drei Curven C^3 haben ausserdem dieselben drei Tangenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gemeinsam.

9. Es seien nun einem Kegelschnitte C_2 ein Fünfseit $g_1 \ldots g_5$ und ein Vierseit $g'_1 g'_2 g'_3 g'_4$ umgeschrieben. Man kann nach Art. 3 durch

die Eckpunkte von $g_2\, g_3\, g_4\, g_5$ und $g'_1\, g'_2\, g'_3\, g'_4$ stets eine Curve dritter Ordnung legen, welche mit g_1 zusammen eine Curve vierter Ordnung giebt, die durch alle Eckpunkte $g\,g$ und $g'\,g'$ läuft. Ebenso bildet die durch $g_1\, g_3\, g_4\, g_5$ und $g'_1\, g'_2\, g'_3\, g'_4$ bestimmte Curve C_3 mit g_2 zusammen eine solche Curve vierter Ordnung. Folglich sind diese Eckpunkte die $10+6 = 4^2$ Basispunkte eines Curvenbüschels vierter Ordnung. Wir können dieses Resultat auch so aussprechen: „Alle Curven vierter Ordnung, welche durch die Ecken von $g_1\, g_2\, g_3\, g_4\, g_5$ und $g'_1\, g'_2\, g'_3$ sowie durch einen dritten Punkt m auf g'_1 (zusammen 14 Punkte) laufen, haben ausserdem noch die Schnittpunkte der zweiten von m an C_2 gehenden Tangente mit g'_2, g'_3 gemeinsam". Daraus schliessen wir weiter, dass jede C_4 des Büschels die Geraden g' in vierten Punkten schneidet, welche wieder in einer Tangente des Kegelschnittes C_2 liegen. Jeder C_4 entspricht eine andere Tangente, das System der C_4 ist projectiv dem Systeme der Tangenten von C_2. Daher auch der Satz:

„Die 20 Eckpunkte zweier der C_2 umgeschriebenen Fünfseite liegen stets auf einer Curve vierter Ordnung. Ausserdem giebt es unendlich viele Fünfseite, die der C_2 umgeschrieben und der C_4 eingeschrieben sind und welche die einzelnen Quintupel einer pentadischen Tangenteninvolution an C_2 bilden."

10. Wir wollen, einige weitere hier mögliche Betrachtungen übergehend, nur dieses anführen. Die Curve C_4 zweier Fünfseite g und g' schneidet die C_2 in 8 Punkten a. Jeder a muss der Eckpunkt eines Fünfseites sein, welches der im vorigen Artikel erwähnten Reihe angehört. Da die in a an C_2 gezogene Tangente für zwei Seiten ihres Fünfseites gezählt werden muss, so werden die in ihren weiteren Schnittpunkten p, p', p'' mit C_4 an C_4 gezogenen Tangenten auch die C_2 berühren und sich ausserdem in drei Punkten auf der C_4 schneiden müssen. Wir erhalten auf diese Weise die $8 \cdot 3 = 24$ gemeinsamen Tangenten von C_2 und C_4, welche uns zeigen, dass C_4 von der zwölften Classe, also allgemein ist, allgemein in dem Sinne, dass sie weder Rückkehr- noch Doppelpunkte besitzt. Diese Curve kann jedoch ganz allgemein nicht sein, da, wie Herr *Lüroth* gezeigt hat, nicht einer jeden C_4 ein Fünfseit einschreibbar ist. Zugleich erhalten wir aber durch die Untersuchung für

unseren Fall Aufklärung über die eigenthümliche gegenseitige Lage jener 24 gemeinsamen Tangenten.

11. Eine Verallgemeinerung der Construction des Art. 7 will ich hier nur ohne Beweis angeben, da ich sie weiter unten (Ende) für Curven beliebiger Ordnung beweisen werde. Die Gerade, welche $g_1\,g_2$ z. B. mit $g_1'\,g_2'$ verbindet, schneidet die C_4 in zwei weiteren Punkten, und zwar in denselben, in welchen sie den um $g_3\,g_4\,g_5$ und $g_3'\,g_4'\,g_5'$ gelegten Kegelschnitt trifft. Hiedurch kann man mittelst aller möglichen Constructionen 200 neue Punkte der Curve erhalten.

12. Es erübrigt noch, die Ausdehnung des im Vorhergehenden Enthaltenen auf Curven $n$ter Ordnung anzugeben. Nämlich:

„Sind zwei n-Seite einer C_2 umgeschrieben, so liegen die $n\,(n-1)$ Eckpunkte derselben allemal auf einer Curve $(n-1)$ter Ordnung, welcher sich unendlich viele n-Seite einschreiben lassen, deren Seiten ebenfalls die C_2 berühren."

Dies involvirt eine Besonderheit der Lage, weil die Curve C_{n-1} durch $\frac{(n-1)\,(n+2)}{2}$ Punkte bestimmt ist und für $n > 2$ stets $n\,(n-1) > \frac{(n-1)\,(n+2)}{2}$.

„Berühren ein $(n+1)$-Seit und ein n-Seit eine C_2, so bilden ihre $\frac{1}{2}\,n\,(n-1) + \frac{1}{2}\,n\,(n+1) = n^2$ Eckpunkte die Basispunkte eines Curvenbüschels $n$ter Ordnung."

Reciproke Sätze beziehen sich auf n-Ecke und $(n+1)$-Ecke sowie auf Classencurven*).

Ist die Curve C_{n-1} durch zwei an C_2 gelegene n-Seite bestimmt, so kann man eine grosse Zahl neuer Punkte der C_{n-1}' auf folgende Art construiren:

Man verbindet $g_1\,g_2$ z. B. mit $g_1'\,g_2'$. Diese Gerade schneidet C_{n-1} in $n-3$ weiteren Punkten, welche bestimmt werden sollen. Zu dem Ende benutzen wir den sogleich zu beweisenden Satz, dass diese Punkte die-

*) Ich merke nur an, dass sich vielleicht auch der Satz in Art. 8 verallgemeinern lassen mag, auf drei Curven $n$ter Ordnung, welche durch je zwei von drei einer C_2 umschriebenen $(n+1)$-Seiten bestimmt sind und dieselben $\frac{n\,(n-1)}{2}$ weitere Punkte gemeinsam haben können. Einen befriedigenden Beweis für diesen Satz besitze ich nicht.

selben sind, in welchen $(g_1 g_2, g'_1 g'_2)$ die Curve $(n-3)$ter Ordnung schneidet, auf der die Eckpunkte von den gegenüberliegenden $n-2$ Seiten $g_3 \ldots g_n$ und $g'_3 \ldots g'_n$ liegen.

Wir betrachten die drei Curven $(n-1)$ter Ordnung: C_{n-1}; C_{n-3} durch $g_3 \ldots g_n$ und $g'_3 \ldots g'_n$ bestimmt, mit g_1, g'_1; ferner C_{n-2} durch $g_1 g_3 \ldots g_n$ und $g'_1 g'_3 \ldots g'_n$ bestimmt, mit $(g_1 g_2, g'_1 g'_2)$. Diese drei Curven haben die $(n-1)(n-2)+2$ Punkte gemeinsam: $g_1 g_2, g'_1 g'_2$, die Eckpunkte von $g_1 g_3 \ldots g_n$ und $g'_1 g'_3 \ldots g'_n$ und schneiden sich daher noch in weiteren $n-3$ Punkten. Was die erste Curve betrifft, so liegen diese $n-3$ Punkte also jedenfalls auf C_{n-1}. Von der dritten Curve sind schon alle möglichen Schnittpunkte der C_{n-2} mit der C_{n-1} gegeben, jene $n-3$ weiteren Punkte müssen also die Schnittpunkte von $(g_1 g_2, g'_1 g'_2)$ mit C_{n-1} sein; sie müssen aber auch die Schnittpunkte des Theiles C_{n-3} der zweiten Curve mit C_{n-1} sein, da g_1 und g'_1 schon in allen möglichen Punkten die C_{n-1} schneiden. Sie sind also die gemeinsamen Punkte von C_{n-1}, C_{n-3} und $(g_1 g_2, g'_1 g'_2)$, w. z. b. w.

So erhält man vorerst $\frac{n^2(n-1)^2(n-3)}{4}$ weitere Punkte, welche wohl meist zur Construction des Curvenzuges hinreichen werden. Diese Construction selbst aber ist zurückgeführt (wie es sein muss) auf eine Aufgabe $(n-3)$ten Grades.

Wien, den 21. Juli 1878.

Nachschrift. Zu Art. 2 ist u. A. die interessante Beziehung nachzutragen, dass das von den vier (eigentlichen) Doppelpunkten gebildete vollständige Viereck das feste Dreiseit zum Diagonaldreiecke hat. Man gelangt hiezu durch Betracht der *Hesse*schen Curven dreier jenes Büschel enthaltenden cubischen Netze. — Ferner liegen je drei Paare der übrigen Doppelpunkte auf einem Kegelschnitte, und mit den ersten vier auf einer Curve C_3, welche durch drei Eckpunkte des Vierseites geht.

Wien, den 4. Dezember 1878.

Zur Theorie der Curven kürzesten Umrings, bei gegebenem Flächeninhalt, auf krummen Flächen.

(Von Herrn *Minding* in Dorpat.)

Durch die Resultate, welche ich über genannte Curven, wenn sie auf Umdrehungsflächen liegen, erhalten und in den Schriften der Kaiserlichen Akademie zu St. Petersburg (*Bulletin, tome* 21, 24, 25) mitgetheilt habe, bin ich zu einer allgemeineren Ansicht geführt worden, welche ich der folgenden Darstellung zu Grunde legen werde.

Zuvor aber wünsche ich zu zeigen, wie sich die allgemeine Eigenschaft der Curve mit Nutzen für die weitere Betrachtung aus einer statischen Aufgabe herleiten lässt.

Denkt man sich auf einer krummen Fläche einen in sich geschlossenen Faden von gegebener Länge durch eine überall in der Berührungsebene wirkende, auf dem Faden senkrechte Kraft von der Intensität P gespannt, so ergiebt sich die Gleichung für die Gestalt des Fadens wie folgt:

Es sei N die Normale der Fläche, T die Tangente, R der Krümmungshalbmesser in einem Punkte der Curve. Da die Kraft Pds senkrecht auf N und T steht, so sind NTP drei rechtwinklige Axen, deren Richtungszahlen (cosinus) folgende Tafel anzeigt:

	x	y	z
N	n_1	n_2	n_3
T	t_1	t_2	t_3
P	p_1	p_2	p_3

Da die Kraft Pds und der normale Druck Nds senkrecht auf dem Faden stehen, so ist die Spannung θ überall dieselbe. Nennt man

noch $r_1\, r_2\, r_3$ die Richtungszahlen von R, und i die Neigung von R gegen P, so ist

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = \cos i,$$
$$n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 = \sin i,$$

auch ist

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0.$$

Für das Gleichgewicht des Fadens gelten nun folgende Gleichungen:

$$\theta\, d t_i = P p_i\, ds + N n_i\, ds \quad (i = 1, 2, 3),$$

oder weil bekanntlich, wenn $ds = R\, d\sigma$ gesetzt wird, $dt_i = r_i\, d\sigma$ ist, so hat man

$$\theta r_i = R\,(P p_i + N n_i);$$

daher durch Multiplication mit p_i und Summation für $i = 1, 2, 3$

$$\theta \cos i = R P.$$

Wenn also P constant ist, so folgt die Gleichung der Fadencurve

$$\frac{\cos i}{R} = \frac{P}{\theta} = \frac{1}{h},$$

welche bekanntlich aussagt, dass der Faden eine Curve kürzesten Umrings bildet. Für den Druck N erhält man

$$\theta \sin i = R N \text{ oder } N = P \operatorname{tg} i.$$

Die vorstehende Gleichung bleibt noch gültig, wenn der Faden theilweise durch feste Grenzcurven in seiner Ausbreitung gehindert gedacht wird. Es sei $W ds$ der Widerstand der Grenzcurve in einem ihr anliegenden Fadenelemente ds, ferner seien R_1 und i_1 die Werthe von R und i an dieser Stelle, welche durch die Gestalt der Grenzcurve bestimmt und als bekannt anzusehen sind, so hat man für jedes an die Grenzcurve gedrängte Fadenelement zur Bestimmung von W durch θ die Gleichung:

$$\theta = \frac{R_1}{\cos i_1}\,(P - W).$$

Für die von der Grenzcurve abgelösten (freien) Theile des Fadens ist $W = 0$. Betrachtet man namentlich die Trennungsstelle, so verwandeln sich bei dem Uebergange vom letzten anliegenden zum ersten freien Fadenelemente R_1 und i_1 sprungweise in R und i, und da die Spannung überall dieselbe bleibt, so geht auch W von einem letzten endlichen Werthe sprungweise in Null über.

Es sei Q die Resultante von P und N, so hat man $Q = P\cos i + N\sin i$, $P\sin i = N\cos i$, also $Q = \frac{P}{\cos i}$ und $\theta = RQ$. Für die an die Grenzcurve gedrängten Theile des Fadens sind nur $P - W$, R_1, i_1 an die Stelle von P, R, i zu setzen, wodurch $Q_1 = \frac{P-W}{\cos i_1}$ und $\theta = R_1 Q_1$ erhalten wird.

In dieser Gestalt zeigt sich am deutlichsten die statische Bedeutung der Gleichung für θ; diese drückt nur den bekannten Satz aus, dass nach Zerlegung der Kraft in eine normale und eine tangentiale Componente die Spannung der Kraftsumme gleich ist, welche zusammenkommt, wenn auf eine gerade unbiegsame Linie von der Länge des Krümmungshalbmessers überall mit der Intensität der normalen Componente Q in derselben Richtung eingewirkt wird. Im vorliegenden Falle ist die tangentiale Componente überall gleich Null und die Spannung überall dieselbe. Da auch P constant und $Ph = \theta$ ist, so hat auch h in allen freien Theilen der Curve denselben Werth, oder die Krümmung $\frac{1}{h}$ der auf bekannte Weise abgewickelten Curve ist in allen freien Theilen dieselbe.

Ferner muss bei dem Uebergange an die Grenzcurve, wegen der Constanz der Spannung, der Faden, wie überall, mit der Kraft Q zu beiden Seiten gleiche Winkel bilden, d. h. der Faden muss sich an die Grenzcurve tangential anschliessen.

Diese Sätze sind von *Steiner* im 24. Bande des *Crelle*schen Journals (Seite 150) zuerst allgemein ausgesprochen worden; doch dürfte auch ihre vorstehende einfache Herleitung aus der Statik nicht für unnütz befunden werden.

Die Krümmung $\frac{1}{h}$ der abgewickelten Curve wird durch die Argumente p und q eines auf der Fläche gezeichneten Netzes folgendermassen ausgedrückt:

$$\pm \frac{\sqrt{EG-F^2}}{h}\, ds^3 =$$

$$\left(E\,dp + F\,dq\right)\left(\tfrac{1}{2} dG\,dq + \frac{dF}{dp}\,dp^2\right) - \left(F\,dp + G\,dq\right)\left(\tfrac{1}{2} dE\,dp + \frac{dF}{dq}\,dq^2\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, ds^2\left(\frac{dG}{dp}\,dq - \frac{dE}{dq}\,dp\right) + \left(EG-F^2\right) dp^2\, d\left(\frac{dq}{dp}\right).$$

In dieser Differentialgleichung der Curve kürzesten Umrings sind die Argumente p und q ganz beliebige. Wenn man aber annimmt, dass diejenigen Curven des Netzes, für welche p constant ist, selbst Curven kürzesten Umrings sind, so muss der vorstehenden Gleichung durch $p=$ const. Genüge geleistet werden, während zugleich k für jeden bestimmten Werth von p einen bestimmten Werth erhält oder k eine Function von p ist. Setzt man demnach $p=$ const., also $dp=0$ und $dp^2 d\left(\frac{dq}{dp}\right) = dp\,d^2q - dq\,d^2p = 0$, so giebt die vorstehende Gleichung hiezu die Bedingung

$$\pm\frac{1}{k} = \frac{\frac{1}{2}F\frac{dG}{dq} - G\frac{dF}{dq} + \frac{1}{2}G\frac{dG}{dp}}{\sqrt{EG-F^2}\,.\,G\sqrt{G}} = \varphi p,$$

welche sich in folgende Gestalt zusammenziehen lässt:

$$\text{(A.)}\qquad \frac{\dfrac{d\sqrt{G}}{dp} - \dfrac{d\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right)}{dq}}{\sqrt{EG-F^2}} = \varphi p.$$

Diese Bedingung also muss erfüllt werden, wenn die obige Annahme gestattet sein soll, d. h. es muss dann möglich sein, dem Ausdrucke des Linearelements eine solche Form zu geben, dass die Werthe von E, F, G der Gleichung (A.) Genüge leisten.

Vorausgesetzt, dass diese Bedingung erfüllt ist, so darf die weitere Folgerung gezogen werden, dass die vollständige in sich geschlossene Curve kürzesten Umrings aus zwei verschiedenen Theilen bestehen kann und im Allgemeinen bestehen wird, nämlich aus demjenigen Bogen, welcher dem vollständigen Integrale der vorliegenden Differentialgleichung entspricht, und aus einem Bogen der Curve von constantem p, welcher der Ergänzungsbogen genannt werden mag.

Durch eine Umformung der Differentialgleichung wird diese Folgerung noch anschaulicher. Setzt man nämlich $F=0$, oder denkt man sich die Curven von constantem q so gewählt, dass sie jene hier vorausgesetzten Curven von constantem p überall senkrecht schneiden, so wird die Differentialgleichung folgende:

$$\pm \frac{\sqrt{EG}}{h} ds^3 = \tfrac{1}{2}(EdG - GdE)\, dp\, dq + EG dp^2 d\left(\frac{dq}{dp}\right) + \tfrac{1}{2} ds^2 \left(\frac{dG}{dp} dq - \frac{dE}{dq} dp\right).$$

Es ist aber

$$\tfrac{1}{2}(EdG - GdE) = E\sqrt{EG}\, d\sqrt{\frac{G}{E}};$$

daher geben die beiden ersten Glieder rechterhand die Summe

$$E\sqrt{EG}\, d\sqrt{\frac{G}{E}} \cdot dp\, dq + EG\, dp^2 d\left(\frac{dq}{dp}\right) =$$

$$E\sqrt{EG}\, dp^2 \left\{ d\sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{dq}{dp} + \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot d\left(\frac{dq}{dp}\right)\right\} = E\sqrt{EG}\, dp^2 d\left(\frac{\sqrt{G}\,.\,dq}{\sqrt{E}\,.\,dp}\right);$$

also entsteht die Gleichung:

$$\pm \frac{\sqrt{EG}\, ds^3}{h} = E\sqrt{EG}\, dp^2 d\left(\frac{\sqrt{G}\,.\,dq}{\sqrt{E}\,.\,dp}\right) + \tfrac{1}{2} ds^2 \left(\frac{dG}{dp} dq - \frac{dE}{dq} dp\right).$$

Es sei θ der Winkel, unter welchem die gesuchte Curve die Curve von constantem q schneidet, so ist $ds \cos\theta = \sqrt{E}\, dp$, $ds \sin\theta = \sqrt{G}\, dq$, und man erhält

$$\pm \frac{\sqrt{EG}}{h} ds^3 = E\sqrt{EG}\,.\,dp^2 d \operatorname{tg}\theta + \tfrac{1}{2} ds^2 \left(\frac{dG}{dp} \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}} - \frac{dE}{dq} \cdot \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\right),$$

oder weil $E dp^2 d \operatorname{tg}\theta = ds^2 d\theta$ ist, so hat man:

$$\pm \frac{\sqrt{EG}}{h} = \sqrt{EG} \cdot \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\sqrt{G}}{dp} \sin\theta - \frac{d\sqrt{E}}{dq} \cos\theta.$$

In dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung wird θ alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen; die Curve wird da, wo $\theta = 0$ und wo $\theta = \pi$, die Curven von constantem q berühren; wo $\theta = \frac{\pi}{2}$ oder $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ist, wird sie die Curven von constantem p berühren, zu ihrer vollständigen Schliessung aber an einer dieser Stellen, wo $\cos\theta = 0$ oder $dp = 0$ und $d\theta = 0$ ist, noch eines Bogens der dort berührten Curve von constantem p bedürfen.

Für diesen Ergänzungsbogen hat man, da $d\theta = 0$, $\cos\theta = 0$,

$$\text{(B.)} \qquad \pm \frac{\sqrt{EG}}{h} = \frac{d\sqrt{G}}{dp}$$

übereinstimmend mit der Bedingungsgleichung (A.) für $F = 0$. Da $\frac{1}{h} = \varphi p$, so folgt hieraus

$$\pm \varphi p\,.\,\sqrt{E} = \frac{d \log \sqrt{G}}{dp}$$

oder $\log \sqrt{G} = \pm \int \varphi p \,.\, \sqrt{E}\, dp + Q$, wo Q eine Function von q ist, während E sowohl p als q enthält, die Integration aber sich auf p allein bezieht.

Ein solches System von Curven kürzesten Umrings, wie es nach der obigen Voraussetzung die Curven von constantem p bilden sollten, wird auf den Umdrehungsflächen durch die auf der Drehungsaxe senkrechten kreisförmigen Querschnitte dargestellt, da diese Querschnitte Curven kürzesten Umrings sind.

Versteht man jetzt unter dp das Bogenelement der erzeugenden oder Meridiancurve, unter q die Neigung der Ebene dieser Curve gegen eine feste durch die Drehungsaxe gelegte Ebene oder den Drehungswinkel, so erhält man das Linearelement auf der Fläche $= \sqrt{dp^2 + Gdq^2}$. Bezeichnet ferner r den Halbmesser des durch den betrachteten Punkt gehenden Querschnitts, welcher eine Function von p (ohne q) ist, so hat man $G = r^2$ und $E = 1$; daher ist die Bedingung (B.) offenbar erfüllt, nämlich es ist $\frac{dr}{rdp} = \varphi p$, wie erforderlich. Ferner ist $ds . \cos\theta = dp$, $ds . \sin\theta = rdq$, und die Differentialgleichung wird folgende:

$$\pm \frac{r}{h} = r\frac{d\theta}{ds} + \frac{dr}{dp}\sin\theta.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dp und setzt $\cos\theta$ für $\frac{dp}{ds}$, so entsteht

$$\pm \frac{rdp}{h} = r\cos\theta\, d\theta + dr . \sin\theta = d(r\sin\theta),$$

deren Integral

$$r\sin\theta = \pm \int \frac{rdp}{h} + \text{Const.}$$

die Haupteigenschaft der Curven kürzesten Umrings auf Umdrehungsflächen darstellt. Für $\theta = 0$ sei $p = p'$, so erhält man

$$r\sin\theta = \int_p^{p'} \frac{rdp}{h},$$

wo das bisher unbestimmte Vorzeichen so gewählt ist, dass für $p < p'$, $\sin\theta$ positiv wird.

Da $2\pi \int_p^{p'} rdp$ den Flächeninhalt der Zone zwischen den zu p

und p' gehörigen Querschnitten ausdrückt, so besteht die Eigenschaft der gesuchten Curve darin, dass das Product $r \sin\theta$ dem Flächeninhalt der von p bis p' reichenden Zone Z proportional ist; man hat $2\pi r \sin\theta = \frac{Z}{h}$.

Legt man im Punkte A eine Tangente T an die Curve, und eine Tangente T' an den durch A gehenden Querschnitt, schneidet auf T' die Länge dieses Kreises $(2\pi r)$ von A aus ab und projicirt die Strecke $2\pi r$ senkrecht auf T, so ist die Länge dieser Projection $(= 2\pi r \sin\theta)$ der zwischen p und p' (wo $\theta = 0$) enthaltenen Zone Z proportional.

Für kürzeste Linien auf Umdrehungsflächen ist dieselbe Projection constant.

Setzt man $\int r dp = Fp$, so wird $r \sin\theta = \frac{Fp' - Fp}{n}$ und $\operatorname{tg}\theta = \frac{Fp' - Fp}{\pm\sqrt{R}}$, wo R für $\sqrt{h^2 r^2 - (Fp' - Fp)^2}$ gesetzt ist. Da ferner $\operatorname{tg}\theta = \frac{r dq}{dp}$, so wird

$$dq = \frac{dp}{r} \cdot \frac{Fp' - Fp}{\pm\sqrt{R}}.$$

Das doppelte Vorzeichen zeigt, dass die Curve in symmetrische Hälften zerfällt, welche durch einen Meridianbogen geschieden werden, der die Axe der Curve genannt und für welchen $q = 0$ gesetzt werden mag. Zu beiden Seiten dieser Axe wächst der Drehungswinkel q von Null an mit wachsendem p ganz auf gleiche Weise bis zu einem Maximum q', welches für $p = p'$ eintritt, wo der Meridianbogen die Curve berührt. Die Grenzwerthe von p ergeben sich aus den Bedingungen $dp = 0$ und $R = \sqrt{h^2 r^2 - (Fp' - Fp)^2} = 0$; seien sie p^0 und p'', r^0 und r'' die dazu gehörigen r, so hat man

$$hr^0 = Fp' - Fp^0, \quad hr'' = Fp'' - Fp',$$

daher

$$Fp' = \frac{r^0 Fp'' + r'' Fp^0}{r^0 + r''}, \quad h = \frac{Fp'' - Fp'}{r^0 + r''},$$

wodurch die Constanten p' und h bestimmt werden, wenn man p^0 und p'' als gegeben betrachtet, wie es für das Folgende am bequemsten ist.

Da r stets positiv ist, so wächst $Fp = \int r dp$ mit wachsendem p, und p' liegt nothwendig zwischen p^0 und p''. Zwischen diesen Grenzen darf aber r nicht gleich Null werden, wohl aber kann an einer dieser

Grenzen, etwa p^0, $r^0 = 0$ sein, ich schliesse jedoch diesen Fall für jetzt aus, um ihn nachher zu betrachten.

Nach dem Vorstehenden hat man $q' = \int_{p^0}^{p'} \frac{dp}{r} \cdot \frac{Fp' - Fp}{\sqrt{R}}$.

Indem nun p von p' an weiter wächst, wird $Fp' - Fp$ negativ, daher nimmt von da q wieder ab um den Winkel

$$q'' = \int_{p'}^{p''} \frac{dp}{r} \cdot \frac{Fp - Fp'}{\sqrt{R}},$$

so dass der ganze Drehungswinkel von p^0 bis p'' beträgt

$$q' - q'' = \int_{p^0}^{p''} \frac{dp}{r} \cdot \frac{Fp' - Fp}{\sqrt{R}}.$$

Für diese Grenzwerthe p^0 und p'' ist $dp = 0$ oder $\cos\theta = 0$; die Curve berührt an diesen Stellen die Querschnitte p^0 und p''.

Damit die Curve sich schliesse, muss $q' - q'' = 0$ sein; diese Bedingung wird aber nur ausnahmsweise erfüllt, wie es sich am deutlichsten zeigt, wenn statt des Meridianbogens p die Flächenzone $2\pi Fp$ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird. Es sei a eine beliebige constante Länge und $ax = Fp = \int r\,dp$, ferner sei $r = fp = \varphi x$, also $\frac{a\,dx}{r} = dp$, auch werde ah' für h und aR' für R gesetzt, so erhält man aus der Formel $dq = \frac{dp}{r} \cdot \frac{Fp' - Fp}{\sqrt{R}}$ die folgenden:

$$dq = \frac{a\,dx}{r^2} \cdot \frac{x' - x}{\sqrt{R'}},\quad q = \int_{x^0}^{x} \frac{a dx}{r^2} \cdot \frac{x' - x}{\sqrt{R'}},\quad \sqrt{dp^2 + r^2 dq^2} = \frac{ah' dx}{\sqrt{R'}} = \frac{a dx}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{x' - x}{h'}\right)^2}},$$

$$q' = \int_{x^0}^{x'} \frac{a\,dx}{r^2} \cdot \frac{x' - x}{\sqrt{R'}},\quad q'' = \int_{x'}^{x''} \frac{a\,dx}{r^2} \cdot \frac{x - x'}{\sqrt{R'}}.$$

Hiebei ist $r^{(i)} = \varphi x^{(i)}$, $ax^{(i)} = Fp^{(i)}$ für $i = 0, 1, 2$; $h' = \frac{x'' - x^0}{r^0 + r''}$, $x' = \frac{r^0 x'' + r'' x^0}{r^0 + r''}$, $R' = 0$ für $x = x^0$ und $x = x''$.

Da $\left(\frac{dr}{dp}\right)^2$ immer kleiner als 1 sein muss, also $\left(\frac{rdr}{adx}\right)^2 < 1$, so muss

$\frac{a^2}{r^2} > \left(\frac{dr}{dx}\right)^2$ oder $a^2 > (\varphi x \,.\, \varphi' x)^2$ sein; wird nur diese Bedingung erfüllt, so bleibt r noch eine eben so willkürliche Function von x, wie es eine solche von p war. Die vorstehenden Ausdrücke von q' und q'' zeigen, dass diese beiden Grössen nur ausnahmsweise einander gleich sein können, da bei denselben festen Werthen von x^0, x'', r^0, r'' der Verlauf der Function φx oder r, ungeachtet der obigen Einschränkung, noch ganz unbestimmt bleibt. Wenn aber φx gegeben ist, so stellt die Gleichung $q' - q'' = 0$ die Relation zwischen x^0 und x'' dar, welche bestehen muss, damit die Curve sich schliesse.

Wenn aber q' von q'' verschieden ist, so muss unter der Voraussetzung, dass $q' > q''$ sei, ein Bogen des Querschnittes vom Halbmesser r'', dessen Länge $= 2r''(q' - q'')$ ist, als Ergänzungsbogen eingeschaltet werden, um die Curve zu schliessen.

Die vollständige geschlossene Curve kürzesten Umrings auf Umdrehungsflächen besteht demnach aus zwei analytisch ganz verschiedenen Theilen, nämlich aus den beiden symmetrischen Bogen, welche dem allgemeinen Integrale der Differentialgleichung entsprechen, und welche ich mit dem Namen Halbrunde zu bezeichnen versucht habe, und aus dem die Enden derselben verbindenden Kreisbogen des Querschnitts, welcher der Lösung $p =$ const. entspricht. Beide Theile gehen bei ihrem Zusammentreffen nicht allein in Hinsicht ihrer Tangenten, sondern auch ihrer Krümmung so stetig in einander über, dass beiden nach der Abwickelung dasselbe h zukommt, oder wie es passender gesagt wird, der ergänzende Kreisbogen überträgt das ihm zugehörige h auf den ganzen weiteren Verlauf der Curve.

Hieraus folgt, dass alle Curven kürzesten Umrings, deren Ergänzungsbogen bei ungleichen Umfangslängen in denselben Querschnitt fallen, einerlei h haben.

Da der Ergänzungsbogen auch beliebig und selbst unendlich klein werden kann, so gilt der vorstehende Satz nur so lange, als zwischen dem Querschnitt und der Curve noch eine Berührung zweiter Ordnung (ein Zusammentreffen in drei Punkten) besteht; dagegen ist eine Berührung erster Ordnung (ein Zusammentreffen in nur zwei Punkten) nicht

mehr hinreichend, den für den Querschnitt geltenden Werth von h auf die ganze Curve zu übertragen; der Ergänzungsbogen fällt dann, wenn er nicht überhaupt Null ist, in einen anderen Querschnitt.

Um des oben ausgeschlossenen Falles $r^0 = 0$ noch kurz zu erwähnen, so ist es passend, in diesem Falle $p^0 = 0$ zu setzen und das Integral $\int r\,dp = Fp$ von $p = 0$ anfangen zu lassen. Alsdann wird $h = \frac{Fp''}{r''}$ und $Fp' = 0$, daher $q' = 0$ und $q'' = \int_0^{p''} \frac{dp}{r} \cdot \frac{Fp}{\sqrt{h^2 r^2 - (Fp)^2}}$. Dieses q'' drückt den Winkel zwischen zwei Meridianebenen aus, von denen die eine durch die Axe der Curve, die andere durch die Tangente der Curve im Scheitel (wo $r^0 = 0$) gelegt ist.

Die Umdrehungsflächen sind die einzigen, welche unmittelbar ein Netz darbieten, worin die Curven der einen Art, nämlich die Querschnitte, zugleich die Eigenschaft haben, bei gegebenem Umfange einen möglichst grossen Flächenraum einzuschliessen. Es scheint mir aber für die Anschauung klar, dass auch auf unzähligen anderen Flächen ein solches Netz möglich sein muss, in welchem den Curven der einen Art dieselbe Eigenschaft zukommt. Diese Curven würden eine stetige Folge geschlossener, einander gegenseitig nicht schneidender Linien doppelter Krümmung auf der Fläche bilden, analog den Querschnitten der Umdrehungsfläche. In dem Systeme dieser Curven würden dann, wie die obigen auf die allgemeine Differentialgleichung gegründeten Betrachtungen zeigen, die Ergänzungsbogen zu finden sein, welche zum Abschlusse der Curven der gesuchten Art im Allgemeinen nöthig sind.

Betrachtet man z. B. ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen, so scheint es mir, dass drei Systeme der genugsam bezeichneten Art — ich möchte sie der Kürze wegen einstweilen Ringsysteme nennen — bestehen werden, nämlich um jede Axe eines. Wenn nun ein geschlossener Faden von gegebener Länge durch zwei gegebene Punkte gelegt werden und dabei einen möglichst grossen Flächenraum einschliessen soll, so erhält man zwischen den Constanten der Integration (a und b) und der Grösse h ein System von drei transscendenten Gleichungen. Alsdann wird man vielleicht verschiedene Lösungen erhalten, je nachdem man von dem die

eine oder die andere Axe umgebenden Ringsysteme ausgeht, oder es kann auch das eine oder andere dieser Systeme sich als unbrauchbar erweisen. Da ich nicht im Stande bin, diese Vermuthungen durch Rechnung zu unterstützen, so kann ich die sehr wünschenswerthen weiteren Aufklärungen nur der Zukunft anheimstellen.

Dorpat, October 1878.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

(Von Herrn *Milinowski* in Weissenburg i. E.)

In dem Hauptwerke *Steiners* „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" hat der grosse Geometer die Kegelschnitte aus einem Kreiskegel abgeleitet und, wie er später bemerkt, diese Darstellungsweise deshalb verlassen, weil die Elementargeometrie nicht befriedigend beweisen kann, dass jeder Kegel zweiten Grades von einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden kann. Da sich jedoch die projectivischen Eigenschaften des Kreises auf die einfachste Weise ergeben und auf Kegelschnitte übertragen lassen, so ist es wohl des Versuches werth, einen befriedigenden elementaren Beweis jenes Satzes aufzusuchen oder, was gleichbedeutend ist, (cf. *Reye*, Geometrie der Lage I. Th. II. Aufl. Seite 90) den Nachweis zu führen, dass durch projectivische einförmige Grundgebilde keine anderen Curven II. Ordnung als Kegelschnitte erzeugt werden können. Die Beziehungen zwischen den Brennpunktseigenschaften und den projectivischen Eigenschaften eines Kegelschnittes würden dadurch sich einfacher erkennen lassen. Die Ableitung der ersteren aus den letzten vollzieht sich nicht ganz einfach; die folgende Darstellung versucht es, beide Arten von Eigenschaften in unmittelbare Verbindung zu bringen, und zwar mit Hilfe eines Abbildungsprincips, welches *harmonische Verwandtschaft* genannt werden soll. Um eine solche herzustellen, nehmen wir in einer Ebene einen festen Punkt P und eine feste Gerade p als *Centrum* und *Achse* der Verwandtschaft und nennen 2 Punkte verwandt, die durch P und p harmonisch getrennt werden und ebenso heissen 2 Gerade verwandt, welche durch P und p harmonisch getrennt werden. Verwandte Punkte liegen also mit P auf einer Geraden, verwandte Gerade schneiden sich auf p. Demnach liegen verwandte Punkte auf ver-

wandten Geraden und verwandte Gerade gehen durch verwandte Punkte; harmonischen Gebilden sind wieder harmonische Gebilde verwandt.

Den Kegelschnitt definiren wir als geometrischen Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte A und einer festen Geraden l ein constantes Verhältniss haben; F heisst Brennpunkt, l Leitlinie des Kegelschnitts K. Das constante Verhältniss sei $p:q$. Eine Gerade schneide K in B und C und die Leitlinie l in D; wir fällen $B\mathfrak{B}$ und $C\mathfrak{C}$ senkrecht auf l, dann ist $BF : B\mathfrak{B} = CF : C\mathfrak{C} = p : q$, also $BF : CF = B\mathfrak{B} : C\mathfrak{C} = BD : CD$. Daraus aber folgt, dass die Gerade FD den einen der von den Geraden FB und FC gebildeten Winkel halbirt. Die in F auf FD errichtete Senkrechte d halbirt also den anderen Winkel; sie treffe BC in D_1, dann sind $BCDD_1$ harmonisch. Wenn sich BC um D dreht, so behält d oder FD_1 seine Lage; es trennen also D und d jede durch D gezogene Kegelschnittssehne harmonisch, d ist die Polare von D. Sind BC und B_1C_1 irgend 2 Sehnen durch D, so folgt aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits, dass die Schnittpunkte von BB_1 und CC_1, BC_1 und B_1C auf d liegen, und wenn wir B und B_1 zusammenfallen lassen, dass der Schnittpunkt der Tangenten in B und C auf d liegt. Da aber d den Winkel BFC halbirt, so folgt der Satz: Der Winkel, den 2 Brennpunktsstrahlen nach den Berührungspunkten zweier Tangenten bilden, wird durch den Strahl nach ihrem Schnittpunkt halbirt.

Die von F auf l gefällte Senkrechte verlängern wir um sich selbst, errichten im Endpunkte der Verlängerung eine Senkrechte f, und wählen F und f als Centrum und Achse einer harmonischen Verwandtschaft. In dieser ist der Geraden l die g_∞ verwandt. Die Gerade d schneide K in E und G, so sind DE und DG Tangenten an K. Dem Kegelschnitt K ist eine Curve K' verwandt; die den Punkten D, E, G verwandten Punkte seien D', E', G'. Es sind $D'E'$ und $D'G'$ Tangenten an K', und da $DD'F$ in einer Geraden liegen und D' auf g_∞ sich befindet, so hat F für K' die Eigenschaft, dass die Tangenten in den Endpunkten jeder durch F gezogenen Sehne auf dieser senkrecht stehen. Wenn die Tangenten in B und C an K sich in H auf d schneiden und B', C', H' die verwandten Punkte sind, so müssen sich auch die Tangenten in B' und C' an K' in H' schneiden; H' liegt aber auch auf d und desshalb

ist $\triangle B'FH' \cong C'FH'$, denn FH' ist gemeinsam, $\measuredangle B' = C' = 90^\circ$, und $\measuredangle B'FH' = C'FH'$, also $B'F = C'F$, d. h. K' ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt F, dessen Radius die halbe zur grossen Achse senkrechte Brennpunktssehne, der halbe Parameter, ist. Also:

Einem Kegelschnitte K, dem geometrischen Orte eines Punktes, dessen Entfernungen von einem festen Punkte F und einer Geraden l in einem constanten Verhältnisse stehen, ist der Kreis K' um F mit dem halben Parameter als Radius verwandt, in einer harmonischen Verwandtschaft, deren Centrum der Brennpunkt F und deren Achse f doppelt soweit von F entfernt wie die Leitlinie l, dieser parallel ist und mit ihr auf derselben Seite von F liegt.

Von F fälle man auf l die Senkrechte FM, construire um M mit MF einen Kreis $\varkappa$, dessen Ebene auf l senkrecht steht, nehme auf seiner Peripherie einen beliebigen Punkt N, lege eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ parallel zu der durch N und l bestimmten Ebene, und projicire den Kegelschnitt K von N aus auf $\mathfrak{E}$; welches ist die Form der Projection K''?

Es seien $A_1\, A_2$ zwei feste Punkte von K, $A_1'\, A_2'$ die ihnen verwandten Punkte auf K', X und X' zwei variable verwandte Punkte auf K und K'; es treffen A_1X und A_2X die Gerade l in X_1 und X_2; $A_1'X'$ und $A_2'X'$ die g_∞ in X_1' und X_2', dann sind X_1 und X_1', X_2 und X_2' verwandt und liegen je mit F in einer Geraden, d. h. es ist

$$FX_1 \parallel A_1'X_1',\; FX_2 \parallel A_2'X_2' \text{ oder } \measuredangle X_1FX_2 = A_1'X'A_2'.$$

Da aber der letztere Winkel constant ist, so folgt: *Projicirt man einen variablen Punkt X eines Kegelschnitts von 2 festen Punkten A_1 und A_2 auf die Leitlinie, verbindet die Projectionen X_1 und X_2 mit dem Brennpunkte F, so schliessen die Verbindungslinien einen constanten Winkel ein.*

Verbindet man den beliebig auf dem vorhin construirten Kreise $\varkappa$ genommenen Punkt N mit X_1 und X_2, so muss der Winkel $X_1NX_2 = X_1FX_2$ sein. Die Geraden NA_1, NA_2, NX mögen die Ebene $\mathfrak{E}$ in A_1'', A_2'', X'' schneiden; dann ist $A_1''X'' \parallel NX_1$, $A_2''X'' \parallel NX_2$, also $\measuredangle A_1''X''A_2''$ gleich dem constanten Winkel X_1NX_2, d. h. der Ort des Punktes X'' ist ein Kreis K'', also: *Fällt man vom Brennpunkte F auf die Leitlinie l eines Kegelschnittes K die Senkrechte FM, construirt mit MF um M einen Kreis $\varkappa$, dessen Ebene auf l senkrecht steht, so wird der Kegel,*

dessen Scheitel N *auf* $\varkappa$ *liegt und dessen Basis der Kegelschnitt* K *ist, von jeder Ebene, welche der durch* N *und* l *bestimmten Ebene parallel ist, in einem Kreise geschnitten.*

Für das Folgende wird noch der aus dem Vorigen sich unmittelbar ergebende Satz gebraucht: Jedes Stück einer Tangente zwischen den beiden Tangenten im Scheitel der grossen Achse erscheint dem Brennpunkte unter einem rechten Winkel und umgekehrt: Dreht sich ein rechter Winkel um seinen Scheitel, so schneiden seine Schenkel 2 parallele Gerade in Punkten, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt einhüllen.

Wir definiren 2 projectivische Strahlenbüschel als solche, welche aus 2 Punkten eines Kegelschnitts sämmtliche Punkte desselben projiciren, und stellen die Frage: Durch wieviel Paare homologer Strahlen wird die Projectivität bestimmt? Diese Frage wird gleichzeitig mit der folgenden beantwortet: Wieviel Punkte bestimmen einen Kegelschnitt?

Für den Kreis nehmen wir die Polareigenschaften als bewiesen an und folgern dieselben aus der harmonischen Verwandtschaft für den Kegelschnitt. Dann aber folgt: Zwei Kegelschnitte sind identisch, wenn sie fünf gemeinsame Punkte haben. — Es seien $ABCDE$ diese 5 Punkte, es mögen sich AB und CD in F, AD und BC in G, AC und BD in H schneiden, dann ist für beide Kegelschnitte GH die Polare von F. Die Gerade FE schneide GH in L, die Kegelschnitte in M_1 und M_2; dann sind $FLEM_1$ und $FLEM_2$ harmonisch, also fallen M_1 und M_2 zusammen in M. Noch mögen sich DE und CM in N, DM und CE in O schneiden, dann sind N und O sowohl, wie G und H harmonisch durch beide Kegelschnitte getrennt, also müssen sich diese in 2 Punkten P und Q auf GH schneiden. Ist nun X ein beliebiger Punkt von GH, so ist seine Polare für beide Kegelschnitte dieselbe, denn sie muss durch F gehen und PQ von X' harmonisch trennen. Daraus aber folgt, dass die Geraden XA, XB, XC, XD, XE, XM beide Kegelschnitte in denselben Punkten treffen. Da X beliebig ist, so haben dieselben alle ihre Punkte gemeinsam.

Auf dieselbe Weise, wie der obige Satz selbst, ergiebt sich die Umkehrung:

In einer harmonischen Verwandtschaft ist einem Kreise, dessen Mittelpunkt F das Centrum der Verwandtschaft ist, ein Kegelschnitt verwandt, in welchem F ein Brennpunkt ist.

Wir kommen dazu folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

In einer harmonischen Verwandtschaft ist einem Kreise stets ein Kegelschnitt verwandt.

Es seien O und b Centrum und Basis der Verwandtschaft. Die einem Kreise K verwandte Figur K' ist, wie sich unmittelbar aus den Eigenschaften der harmonischen Verwandtschaft ergiebt, von der II. Ordnung und II. Classe; für sie gelten alle Polareigenschaften eines Kegelschnitts. Es soll gezeigt werden, dass sie ein Kegelschnitt ist. Zu dem Zwecke fälle man von O auf b eine Senkrechte, construire ihre Mittelsenkrechte g und deren Pol G in Bezug auf den Kreis K, so sind ihnen g_∞ und ein Punkt G' verwandt, der alle durch ihn gezogenen Sehnen von K' halbirt; G' ist der Mittelpunkt von K'. Man fälle $GA \perp g$, construire zu irgend einem Punkte B von g die Polare in Bezug auf K, welche g in C schneiden mag. Ist M der Mittelpunkt von K, dann steht $BG \perp CM$ und $CG \perp BM$ und es ist $\triangle ABG \sim ACM$, woraus $AB \,.\, AC = AG \,.\, AM$ folgt. Die Geraden GA, GB, GC mögen b in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ treffen; es ergeben sich die Proportionen

$$AB : \mathfrak{A}\mathfrak{B} = AG : \mathfrak{A}G$$
$$AC : \mathfrak{A}\mathfrak{C} = AG : \mathfrak{A}G,$$

also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \frac{AM \,.\, \mathfrak{A}G^2}{AG}.$$

Demnach ist das Product $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ constant, wie auch B auf g gewählt wird.

Ein Kreis über $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ als Durchmesser treffe $\mathfrak{A}M$ in D und E, so dass also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}D^2 = \mathfrak{A}E^2.$$

Durch G', D, E werde ein Kreis gelegt, welcher b in $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ schneidet, dann ist $G'\mathfrak{M} \perp G'\mathfrak{M}_1$. Diesen Geraden sind 2 Gerade, m und m_1, durch G verwandt, welche in Bezug auf den Kreis K conjugirte Strahlen sind. Liegt G innerhalb K, so schneiden beide, m und m_1, den Kreis; liegt G ausserhalb, so trifft ihn nur eine. Daraus folgt, dass entweder beide Gerade $G'\mathfrak{M}$ und $G'\mathfrak{M}_1$ die Curve II. Ordnung K' treffen oder doch

mindestens eine. — Im ersten Falle seien SS_1 und TT_1 die Schnittpunkte mit K' und $SS_1 > TT_1$. Die Tangenten in S, S_1, T seien s, s_1, t; letztere schneide die beiden ersten in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$. Der Kreis über $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ als Durchmesser muss SS_1 in 2 Punkten U und V schneiden, welche gleich weit von G' entfernt sind. — Im zweiten Falle schneide die eine Gerade K' in S und S_1. Da g_∞ die Polare von G' ist, so hat die Curve K' 2 Asymptoten a und a_1 mit den Berührungspunkten α und α_1; die eine von ihnen möge die Tangenten s und s_1 durch S und S_1 in $\mathfrak{S}''$ und $\mathfrak{S}_1''$ treffen, dann muss der über $\mathfrak{S}''\mathfrak{S}_1''$ als Durchmesser beschriebene Kreis SS_1 in 2 Punkten schneiden, die gleich weit von G' abstehen; sie heissen U und V. — In beiden Fällen nehmen wir U und V als Brennpunkte eines Kegelschnitts K'', dessen grosse Achse SS_1 ist. Irgend ein Punkt P von SS_1 hat für K' und K'' dieselbe Polare p, denn diese muss durch den Schnittpunkt (ss_1) gehen, d. h. auf SS_1 senkrecht stehen und P von S und S_1 harmonisch trennen. Weil nun im ersten Falle T, im zweiten α ein gemeinsamer Punkt von K' und K'' ist, so muss PT sowohl wie $P\alpha$ jede der Curven in demselben Punkte schneiden. Da aber P ein beliebiger Punkt von SS_1 ist, so haben K' und K'' alle ihre Punkte gemeinsam; K' *ist also ein Kegelschnitt.*

Wir können jetzt zeigen, dass sich durch 4 Punkte A_1A_2BC unendlich viele Kegelschnitte legen lassen. — Zu dem Zwecke verbinden wir A_1 und A_2 mit B und C durch die Geraden b_1, b_2, c_1, c_2 und schneiden diese durch eine solche Gerade g in B_1, B_2, C_1, C_2, dass keine der Strecken B_1B_2 und C_1C_2 ganz innerhalb der anderen liegt, dass also entweder $B_1B_2C_1C_2$ oder $B_1C_1B_2C_2$ die Reihenfolge ist. Für jede dieser Reihenfolgen giebt es ein Punktepaar $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, welches gleichzeitig die Strecken B_1C_2 und B_2C_1 harmonisch theilt. Auf dem über $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise nehmen wir beliebig den Punkt O, verlängern die von O auf g gefällte Senkrechte um sich selbst, errichten im Endpunkte der Verlängerung die Senkrechte b und wählen O und b als Centrum und Achse einer harmonischen Verwandtschaft. In dieser ist der Geraden g die g_∞ verwandt, also liegen die den Punkten $B_1B_2C_1C_2$ verwandten Punkte $B_1'B_2'C_1'C_2'$ im Unendlichen; es liegen B_1 und B_1', B_2 und B_2', C_1 und C_1', C_2 und C_2' je mit O in einer Geraden. Sind

$A'_1\ A'_2\ B'\ C'$ die zu $A_1\ A_2\ B\ C$ verwandten Punkte, so sind $A'_1\ B'\ B'_1$, $A'_1\ C'\ C'_1$, $A'_2\ B'\ B'_2$, $A'_2\ C'\ C'_2$ je in einer Geraden und parallel zu $O\ B_1\ B'_1$, $O\ C_1\ C'_1$, $O\ B_2\ B'_2$, $O\ C_2\ C'_2$, da $B'_1\ C'_1\ B'_2\ C'_2$ im Unendlichen liegen. Weil nach der Construction $\measuredangle\ B_1 O B_2 = C_1 O\ C_2$ ist, so muss auch $\measuredangle\ A'_1\ B'\ A'_2 = A'_1\ C'\ A'_2$ sein. Daher liegen die vier Punkte $A'_1\ A'_2\ B'\ C'$ auf einem Kreise K', dem ein Kegelschnitt K durch die vier Punkte $A_1\ A_2\ B\ C$ verwandt ist. Wenn der Punkt O den über $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ beschriebenen Kreis durchläuft, so durchläuft der Kegelschnitt K eine Reihe von Kegelschnitten, die sämmtlich durch die 4 Punkte $A_1\ A_2\ B\ C$ gehen und ein *Büschel* bilden. *In einem Büschel giebt es demnach soviel Kegelschnitte, als Punkte auf einem Kreise oder auf einer Geraden.* Durch A_1 denken wir uns eine Gerade gelegt, so muss sie von jedem Kegelschnitte des Büschels in einem anderen Punkte geschnitten werden, denn 2 Kegelschnitte des Büschels können keinen fünften Punkt gemeinsam haben, weil sie sonst zusammenfallen würden, daher geht durch irgend einen fünften Punkt nur ein Kegelschnitt des Büschels oder: *Durch fünf Punkte lässt sich stets ein einziger Kegelschnitt legen.* Hieraus aber folgt: *Zwei projectivische Strahlenbüschel sind durch drei Paar homologe Strahlen bestimmt, und erzeugen stets einen Kegelschnitt.*

Von O fällten wir auf g eine Senkrechte, deren Fusspunkt F sein mag; um F construiren wir mit FO einen Kreis, dessen Ebene auf g senkrecht steht, nehmen auf demselben beliebig den Punkt X an und legen durch X und g eine Ebene $\mathfrak{x}$. Jede dieser parallele Ebene schneidet den Kegel, welcher durch X und den zum Punkte O gehörenden Kegelschnitt des Büschels gelegt ist, in einem Kreise. Da g und X beliebig sind, so folgt: *Jeder Kegelschnitt kann auf unendlich viele Arten in einen Kreis projicirt werden.*

Vermittelst der harmonischen Verwandtschaft sind wir mit geringer Rechnung gleichzeitig zu den Brennpunkts- und projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte gelangt.

Weissenburg i. E., Juli 1878.

Ueber ein besonderes Hyperboloid.

Hierzu eine Figurentafel.

(Von Herrn *Heinrich Vogt* in Breslau.)

EINLEITUNG.

Nachstehende Untersuchung geht aus von dem bekannten Satze: Wenn unter den Strahlen eines Kegels vom zweiten Grade drei untereinander normale vorhanden sind, so enthält derselbe unendlich viele Tripel von Normalstrahlen*). Es wird dieser Satz und unabhängig davon der entsprechende für das Hyperboloid auf elementarem Wege bewiesen. Hierbei zeigt sich, dass die durch drei normale Erzeugende charakterisirten Oberflächen zweiten Grades in gewisser Weise im Raume Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel wiederholen, der Kegel durch seine Beziehung zu dem speciellen Tetraeder, dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden, das Hyperboloid durch seine Beziehung zum allgemeinen Tetraeder. Ferner steht das besprochene Hyperboloid in ähnlicher Weise dem orthogonalen Hyperboloid gegenüber**), wie in der Ebene die gleichseitige Hyperbel dem Kreise. Ausserdem sind Ausartungen desselben Paare von Normalebenen und das gleichseitige hyperbolische Paraboloid.

Hierdurch scheint der Name „*gleichseitiges Hyperboloid*“ gerechtfertigt, zumal auch schon *Joachimsthal* und Herr *Fiedler* auf dieses Entsprechen hingewiesen haben.

---

*) *Joachimsthal*, dieses Journal Bd. 56, pag. 284.
Hesse, Anal. Geom. des Raumes, Vorl. 16.
Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes Aufl. 2. Bd. 1. Art. 211.
Vogt, der sphärische Kegelschnitt. Inaug. Dissert. Breslau 1873, pag. 13.

**) *Schröter*, dieses Journal Bd. 85.

§. 1. Der gleichseitige Kegel.

Wenn in einem Kegel zweiten Grades mit dem Mittelpunkt O drei Strahlen $a\,b\,c$ vorkommen, welche untereinander normal sind, und man legt durch einen beliebigen Punkt α des Strahls a eine Ebene $\mathfrak{A}$ parallel zur Ebene $(b\,c)$, so schneidet diese den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel. Denn die Schnittcurve enthält als unendlich ferne Punkte die unendlich fernen Punkte von b und c, deren Richtungen also die Asymptotenrichtungen der Curve sind. Sollte nun unter den erzeugenden Strahlen des Kegels O noch ein anderes Tripel $x\,y\,z$ von untereinander normalen Graden vorhanden sein, welches die Ebene $\mathfrak{A}$ in den Hyperbelpunkten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ durchbohren möge, so wäre Ebene $(x\,a)$ normal zu den Ebenen $(y\,z)$ und $\mathfrak{A}$, folglich zu deren Schnittlinie $(\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$;

ebenso $(y\,a)$ normal zu $(\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})$
und $(z\,a)$ zu $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$.

Es müsste also auch Linie

$$(\mathfrak{x}\,\alpha) \perp (\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$$
$$(\mathfrak{y}\,\alpha) \perp (\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})$$
$$(\mathfrak{z}\,\alpha) \perp (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$$

sein, d. h. von den vier Punkten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\alpha$ müsste jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks sein. Diese Bedingung ist nothwendig, aber noch nicht hinreichend. Denn nimmt man einen Punkt $\mathfrak{x}$ der gleichseitigen Hyperbel beliebig an, so giebt es unendlich viele Paare $\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ auf derselben, deren Höhenpunkt mit $\mathfrak{x}\,\alpha$ ist*), nämlich die Schnitt-

*) Zu drei Punkten einer gleichseitigen Hyperbel liegt immer ihr Höhenpunkt ebenfalls auf derselben, und umgekehrt: ein Kegelschnitt, welcher durch drei Punkte und ihren Höhenpunkt geht, ist immer eine gleichseitige Hyperbel. *Schröter,* Theorie der Kegelschn. §. 38, 42. *Salmon-Fiedler,* Geom. der Kegelschn. Art. 236. Dieser Satz ergiebt sich leicht als Folgerung des *Pascal*schen Satzes: Ist H der Höhenpunkt des Dreiecks $A\,B\,C$, K des Dreiecks $A\,B\,D$, so ist $ACHBKD$ ein *Pascal*sches Sechseck. Denn die Schnittpunkte $(AC,\,BK) = k$
und $(AD,\,BH) = h$
stehen mit A und B auch im Verhältniss von Ecke und Höhenpunkt d. h. $(h\,k) \perp (A\,B)$. Das dritte Seitenpaar (CH), (DK) ist $\perp$ $(A\,B)$, also parallel mit $(h\,k)$, d. h. h, k, (CH, DK) liegen in einer Graden. — Da nun ein Kegelschnitt, welcher durch Ecken und Höhenpunkt eines Dreiecks geht, nothwendig eine Hyperbel sein muss, so ergiebt sich, wenn man sich D als den einen unendlich fernen Punkt denkt, dass der andere K in einer zu jenem rechtwinkligen Richtung liegt.

punkte aller zu $(\mathfrak{x}\,\alpha)$ normalen Graden mit der Hyperbel. Wählt man nun $(\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$ so, dass sie Schnittlinie einer durch O normal zu x gelegten Ebene ist, so ist

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}) \perp (\mathfrak{y}\,\alpha)$$
$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}) \perp (O\alpha),$$

folglich
$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}) \perp \text{Ebene } (O\alpha\mathfrak{y}),$$
also
$$y \perp (\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}).$$
Da nun nach Construction
$$y \perp x$$
ist, so muss
$$y \perp \text{Ebene } (O\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z})$$
sein, also auch
$$\measuredangle\,(y\,z) = 90^{\circ}.$$

Nennen wir die Höhenfusspunkte des Dreiecks

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z} \qquad \xi\,\eta\,\zeta,$$

so ist

$$\measuredangle\,(\mathfrak{x}\,O\,\xi) = (\mathfrak{y}\,O\,\eta) = (\mathfrak{z}\,O\,\zeta) = 90^{\circ},$$

also a Höhe der rechtwinkligen Dreiecke

$$(\mathfrak{x}\,O\,\xi),\ (\mathfrak{y}\,O\,\eta),\ (\mathfrak{z}\,O\,\zeta),$$

mithin

$$(\alpha\,\mathfrak{x})\,.\,(\alpha\,\xi) = (\alpha\,\mathfrak{y})\,.\,(\alpha\,\eta) = (\alpha\,\mathfrak{z})\,.\,(\alpha\,\zeta) = -\,a^{2}.$$

Dass die durch O zu x normal gelegte Ebene oder, was dasselbe ist, die durch ξ zu $(\mathfrak{x}\,\alpha)$ normal gelegte Grade die Hyperbel immer in zwei reellen Punkten $\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ schneidet, ergiebt sich in folgender Weise: Durchläuft $\mathfrak{x}$ den Hyperbelzweig, auf welchem α liegt, so nimmt $(\mathfrak{x}\,\alpha)$ alle Richtungen an, welche in den die Hyperbel nicht enthaltenden Quadranten der Asymptoten möglich sind; die durch ξ gehende Normale hat sämmtliche Richtungen der andern Quadranten, schneidet die Hyperbel also immer in zwei reellen Punkten $\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$. Durchläuft $\mathfrak{x}$ dagegen den α nicht enthaltenden Hyperbelzweig, so liegt ξ wegen der Relation $(\alpha\,\mathfrak{x})\,.\,(\alpha\,\xi) = -\,a^{2}$ innerhalb des Zweiges, welchem α angehört, die durch ξ gehende Normale schneidet also ebenfalls die Hyperbel in zwei reellen Punkten.

Somit gelten die Sätze:

I. *Kommen in einem Kegel zweiten Grades drei Strahlen vor, welche untereinander normal sind, so enthält der Kegel unendlich viele solcher Tripel; nämlich für jeden Strahl giebt es zwei zu ihm und untereinander normale.*

II. *In dem untersuchten Kegel zweiten Grades ist jede Ebene, welche*

denselben in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, normal zu einer Erzeugenden des Kegels, und umgekehrt.

III. *Der Punkt, in welchem eine Ebene von dem zu ihr normalen Strahl des Kegels durchbohrt wird, ist Höhenpunkt zu den Durchbohrungspunkten sämmtlicher Tripel von Normalstrahlen.*

Ein Beispiel dieses Kegels liefert jeder Kegel zweiten Grades, welcher die vier Höhen des speciellen Tetraeders enthält, dessen Höhen sich in einem Punkte schneiden[*]), oder, was auf dasselbe herauskommt, drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten und die zugehörige Höhe. Denn jede dieser Höhen geht durch den Höhenpunkt der Gegenfläche; ein solcher Kegel schneidet also jede Fläche des Tetraeders in einer gleichseitigen Hyperbel. Wählen wir nun zu einem beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der gleichseitigen Hyperbel auf derselben zwei beliebige Punkte $\mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$, welche mit $\mathfrak{x}$ den gemeinschaftlichen Höhenpunkt a haben, so ist jedes derartige Tetraeder $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,O$ ein Tetraeder mit Höhenpunkt; a ist der Höhenstrahl zu $x\,y\,z$, d. h. die Schnittlinie der durch

$$x \text{ auf } (y\,z)$$
$$y \text{ auf } (z\,x)$$
$$z \text{ auf } (x\,z)$$

gelegten Normalebenen. Umgekehrt lässt sich auch jeder der Strahlen $x\,y\,z$ als Höhenstrahl der von den drei übrigen gebildeten Ecke auffassen.

IV. *Enthält also ein Kegel zweiten Grades vier Strahlen, von denen jeder der Höhenstrahl der drei andern ist, so enthält er unendlich viele solche Quadrupel; nämlich der Höhenstrahl jedes beliebigen Tripels seiner Erzeugenden gehört ebenfalls zu seinen Strahlen.*

Als Bedingungen für vier solche charakteristische Strahlen des Kegels ergeben sich leicht

$$\cos(a\,x)\,.\,\cos(y\,z) = \cos(a\,y)\,.\,\cos(z\,x) = \cos(a\,z)\,.\,\cos(x\,y).$$

Wir bezeichnen den Kegel als „*gleichseitig*". Als Ausartungen der durch vier Strahlen der angegebenen Art bestimmten gleichseitigen Kegelschaar sind die drei Paar darunter enthaltenen unter einander normalen Ebenen zu betrachten.

---

1) Siehe *Baltzer*, Elem. der Math. Buch 5. §. 6, 10.

§. 2. Das gleichseitige Hyperboloid.

Sind unter den Erzeugenden eines Hyperboloids drei derselben Schaar angehörige $a\ b\ c$ normal untereinander, so sind die zu ihnen parallelen Strahlen, welche der andern Schaar angehören, ihre kürzesten Entfernungen $a'\ b'\ c'$. Wir nennen (S. Fig. 1) die Schnittpunkte von

$$a \text{ mit } b'\ c' \quad \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$$
$$b \text{ mit } c'\ a' \quad \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{a}_1$$
$$c \text{ mit } a'\ b' \quad \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_2;$$

alsdann sind $\mathfrak{c}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{c}_1$ sechs Ecken eines rechtwinkligen graden Parallelepipedon, dessen Kanten wir in der genannten Umlaufsrichtung positiv rechnen.

Ist z ein beliebiger Strahl der Schaar $a\ b\ c$, dessen Schnittpunkte mit $a'\ b'\ c'$ wir mit $\mathfrak{z}\ \mathfrak{z}_1\ \mathfrak{z}_2$ bezeichnen, und sollte es ein Paar der Schaar $a'\ b'\ c'$ angehörige Strahlen $x'\ y'$ geben

$$(x'\,a) = \mathfrak{x},\quad (x'\,b) = \mathfrak{x}_1,\quad (x'\,c) = \mathfrak{x}_2,$$
$$(y'\,a) = \mathfrak{y},\quad (y'\,b) = \mathfrak{y}_1,\quad (y'\,c) = \mathfrak{y}_2,$$

welche z in $\xi\ \eta$ rechtwinklig schneiden und untereinander normal sind, so wären zunächst im Tetraeder $(\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{y}_2\ \mathfrak{x}_2)$ zwei Paar Gegenkanten

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = a,\quad (\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_2) = c$$

und

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_2) = x',\quad (\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_2) = y'$$

zu einander normal. Dies ist hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass die Höhen des Tetraeders sich in einem Punkte schneiden*), durch welchen auch die kürzesten Entfernungen der Gegenkanten $b'\ z$ gehen müssen. Der Höhenpunkt für das Tetraeder $(\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{y}_2\ \mathfrak{x}_2)$ ist also $(b'z) = \mathfrak{z}_1$. Da $(\mathfrak{y}\ \mathfrak{z}_1) \perp (c\,x')$, also auch $(\mathfrak{y}\ \mathfrak{z}_1) \perp (\mathfrak{x}\ \mathfrak{b}_2)$, weil $(\mathfrak{x}\ \mathfrak{b}_2)$ der Ebene $(c\ x')$ angehört, und $(\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_2) \perp (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$, so ist $\mathfrak{z}_1$ Höhenpunkt des Dreiecks $(\mathfrak{x}\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{y})$ und ebenso von $(\mathfrak{x}_2\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{y}_2)$, $(\mathfrak{x}\ \eta\ \mathfrak{x}_2)$, $(\mathfrak{y}\ \xi\ \mathfrak{y}_2)$. Darnach ist

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)\,.\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_2) + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{x})\,.\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}) = 0$$
$$(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1)\,.\,(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}) + (\mathfrak{b}_2\mathfrak{x}_2)\,.\,(\mathfrak{b}_2\mathfrak{y}_2) = 0$$

u. s. w. D. h. sämmtliche Strahlen $x'\ y'$, welche untereinander normal sind,

*) *Baltzer,* Elem. der Math. Buch 5, §. 6, 10.

z rechtwinklig schneiden und durch a und c gehen, schneiden auf a eine Involution B mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{b}$ und der Potenz $(\mathfrak{b}\mathfrak{x}) \,.\, (\mathfrak{b}\mathfrak{y}) = -(\mathfrak{b}\mathfrak{z}_1) \,.\, (\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2)$ aus. Da $x'y'$ nun auch b schneiden sollen, bilden sie mit ab Gegenkanten des Tetraeders $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1)$, dessen Höhenpunkt $\mathfrak{z}_2$ ist. Deshalb müssen $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ ein Punktepaar der Involution C sein, deren Mittelpunkt $\mathfrak{c}$ und deren Potenz $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}) \,.\, (\mathfrak{c}\,\mathfrak{y}) = -(\mathfrak{c}\,\mathfrak{z}_2) \,.\, (\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1)$ ist; sie sind also das gemeinschaftliche Punktepaar der Involutionen B und C.

Es ist zu erweisen, dass dieses Punktepaar immer reell vorhanden ist. Es ist der Fall, wenn wenigstens eine der beiden Involutionen elliptisch ist*).

Die Ebene $(z\,b')$ schneidet die Ebenen $(a\,c')$ und $(c\,a')$ in den parallelen Graden $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_2)$ und $(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z})$; die durch $\mathfrak{z}_2$ parallel zu b' gelegte Grade schneide $(\mathfrak{z}\,\mathfrak{b}_2)$ in ζ_2, so ist $(\zeta_2\,\mathfrak{a}_1) \parallel (\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{a}_2)$.

$$\triangle\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2) \sim (\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}) \sim (\zeta_2\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}),$$

folglich

$$\frac{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)}{(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1)} = \frac{(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2)}{(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z})} = \frac{(\mathfrak{b}_2\,\zeta_2)}{(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z})},$$

und wegen

$$\triangle\,(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}_2) \sim (\zeta_2\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}_1):\quad \frac{(\mathfrak{b}_2\,\zeta_2)}{(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z})} = \frac{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1)}{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z})},$$

also

$$\frac{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1)}{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z})} = \frac{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)}{(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1)}.$$

Setzen wir letzteres Verhältniss $= \varkappa$, so wird $\dfrac{(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)}{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z})} = -\varkappa$,

$$\frac{(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z})} = 1 - \varkappa, \quad \frac{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{z})} = \frac{1}{1-\varkappa}.$$

Durch Projection auf die Ebene $(a\,c')$ erhält man in derselben Weise

$$\frac{(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{z}_2)}{(\mathfrak{c}\,\mathfrak{z}_2)} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}.$$

Durch Vergleichung der zusammengehörigen Werthe von

$$\frac{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)}{(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1)}, \quad \frac{(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{z})}, \quad \frac{(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{z}_2)}{(\mathfrak{c}\,\mathfrak{z}_2)}$$

ergiebt sich, was auch die Anschauung lehrt, dass immer einer der Schnittpunkte z. B. $\mathfrak{z}_1$ auf seiner Graden zwischen die Ecken $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_2)$ des Parallele-

---

*) *Schröter*, Geom. der Kegelschn. §. 16.

pipedon fällt, die beiden andern ausserhalb, und zwar, wenn wir eine bestimmte Umlaufsrichtung festgesetzt haben, der eine, hier $\mathfrak{z}_2$, hinter die Kantenstrecke $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c})$, der andere $\mathfrak{z}$ vor die betreffende Strecke $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1)$*).

Die Producte, welche negativ genommen die Potenzen der Involutionen auf $a\ b\ c$ liefern, sind

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)\,.\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_2) > 0, \qquad &&(\mathfrak{c}\,\mathfrak{z}_2)\,.\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1) < 0,\\ &(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{z}_2)\,.\,(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}) > 0, &&(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c})\,.\,(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2) > 0,\\ &(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{z})\,.\,(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1) < 0; &&(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1)\,.\,(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}) > 0. \end{aligned}$$

Unter zwei zusammengehörigen Producten zeigt sich nie mehr als eins negativ; von den zusammengehörigen Involutionen ist also immer mindestens eine elliptisch, die zusammenfallenden Punktepaare $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ und ebenso $(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1)$, $(\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_2)$ sind immer reell, folglich auch die zu z und untereinander normalen Strahlen $x'\,y'$ und die zu ihnen parallelen der andern Schaar angehörigen $x\,y$, welche leicht zu finden sind, da der Mittelpunkt des Parallelepipedon $(\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}_1)$ mit dem Mittelpunkt des Hyperboloids zusammenfällt.

I. *Kommen unter den Strahlen eines Hyperboloids drei untereinander normale vor, so giebt es unendlich viele solche Tripel von Normalstrahlen, und zwar sind zu jedem Strahl in derselben Schaar zwei mit ihm und untereinander normale vorhanden, welche elementar construirbar sind.*

II. *Ist einmal eine Ebene, welche ein Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, normal zu einer Erzeugenden desselben, so gilt dasselbe von jedem gleichseitigen Hyperbelschnitt.*

Wir nennen das so definirte Hyperboloid „*gleichseitig*".

Satz II zeigt das gleichseitige Hyperboloid als analog zu dem von *Steiner* zuerst untersuchten, von Herrn *Schröter* „orthogonal" genannten Hyperboloid**), dessen Kreisschnitte zu je einer Erzeugenden normal sind. Jedoch fällt der Unterschied in die Augen, dass in jedem Hyperboloid die Kreisschnitte nur in zwei Ebenenrichtungen, gleichseitige Hyperbelschnitte dagegen im Allgemeinen in unendlich vielen Richtungen vorhanden sind,

*) Diese Eigenschaften der Schnittverhältnisse gelten natürlich ebenso für das allgemeine Hyperboloid.

**) Dieses Journal Bd. 85.

welche in den Mittelpunkt des Hyperboloids übertragen einen Kegel zweiten Grades umhüllen*).

In den Tetraedern

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{x}_2)\quad(\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{x}_1)\quad(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}),$$

welche sämmtlich zwei Paar normale Gegenkanten

$$(x'\,y',\,a\,c)\quad(x'\,y',\,c\,b)\quad(x'\,y',\,b\,a)$$

besitzen, sind die kürzesten Entfernungen der Gegenkanten

$$(z,\,b')\quad(z,\,a')\quad(z,\,c'),$$

die Höhenpunkte $\qquad\mathfrak{z}_1\qquad\mathfrak{z}\qquad\mathfrak{z}_2.$

Demnach gelten die Relationen

$$(\mathfrak{z}_1\,\xi)\,.\,(\mathfrak{z}_1\,\eta) = (\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{b})\,.\,(\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{b}_2)$$
$$(\mathfrak{z}\,\xi)\,.\,(\mathfrak{z}\,\eta) = (\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}_2)\,.\,(\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}_1)$$
$$(\mathfrak{z}_2\,\xi)\,.\,(\mathfrak{z}_2\,\eta) = (\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{c}_1)\,.\,(\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{c})\text{**)}.$$

Denken wir uns um die Ecken der beiden rechtwinkligen Parallelepipeda, welche von den Strahlen

$$a\;b'\;c\;a'\;b\;c'$$

und $\qquad x\;y'\;z\;x'\;y\;z'$

gebildet werden, die beiden Kugeln beschrieben, so sagen diese Relationen aus, dass die Punkte $\mathfrak{z}_1\;\mathfrak{z}\;\mathfrak{z}_2$ für beide Kugeln gleiche Potenz haben, z also in der Ebene gleicher Potenzen der beiden Kugeln liegt. Dasselbe gilt für die übrigen elf Kanten. Dies ist nur möglich, wenn beide Kugeln identisch sind.

III. *Die Ecken aller auf einem gleichseitigen Hyperboloid zu verzeichnenden rechtwinkligen graden Parallelepipeda liegen auf dem Schnitt einer concentrischen Kugel mit dem Hyperboloid.*

Zu einem beliebigen Strahl z findet man hiernach die normalen, indem man die Schnittpunkte $\xi\;\eta$ von z mit der dem Parallelepipedon $(\mathfrak{c}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{b}_2\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_1\;\mathfrak{c}_1)$ umschriebenen Kugel aufsucht. Die durch $\xi\;\eta$ gehenden Strahlen sind von der verlangten Art.

IV. *Die Quadratsumme der Kanten aller rechtwinkligen Parallelepipeda ist eine Constante;* $x^2+y^2+z^2=r^2$, wo $x\;y\;z$ die halben Kanten des Parallelepipeds, r der Radius der umschriebenen Kugel ist.

---

*) *Beyer*, das räumliche Polarsystem. Inaug. Dissert. Breslau 1868.

**) *Baltzer*, Elem. Buch 5, §. 6, 10.

Die Tangentialebenen des Hyperboloids in den Punkten $\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}$ sind paarweise parallel; die den Durchmessern $(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b})$ conjugirten Ebenenrichtungen sind also die den Graden bc, ca, ab parallelen. Legen wir eine Ebene durch den Mittelpunkt M senkrecht zu a', so trifft diese die Mitte $\mathfrak{m}$ von $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$. Sie schneidet das Hyperboloid in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen parallel $b\;c$ sind. Der zu $(M\,\mathfrak{m})$ conjugirte imaginäre Halbmesser ist der, welcher gegen die Asymptotenrichtung b gleich geneigt ist, d. h. wenn wir die dritte durch $\mathfrak{b}_2$ gehende Kante des Parallelepipeds ziehen, welche gleich und parallel $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1)$ ist, so geht er durch deren Mitte $\mathfrak{n}$; seine Länge ist $(M\,\mathfrak{n}) = (M\mathfrak{m})$. Demnach sind $(M\,\mathfrak{b}_2) = r$, $(M\,\mathfrak{m}) = m$, $(M\,\mathfrak{n}) = n$ ein Tripel conjugirter Halbmesser, $(M\,\mathfrak{n})$ der imaginäre, $(M\,\mathfrak{b}_2)$ und $(M\,\mathfrak{m})$ reell.

Für drei conjugirte Halbmesser $\alpha\,\beta\,\gamma$ eines einschaligen Hyperboloids, von denen γ imaginär sein möge, gelten die Beziehungen

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = \text{Const.} = \varkappa_1$$
$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\sin(\alpha\beta\gamma) = \text{Const.} = \varkappa_2$$
$$(\alpha\beta\sin(\alpha\beta))^2 - (\beta\gamma\sin(\beta\gamma))^2 - (\gamma\alpha\sin(\gamma\alpha))^2 = \text{Const.} = \varkappa_3,$$

wo $\alpha\,\beta\,\gamma\,\sin(\alpha\,\beta\,\gamma)$ das Volumen des durch $\alpha\,\beta\,\gamma$ bestimmten Parallelepipedon bedeutet, $\alpha\beta\sin(\alpha\,\beta)$ die Fläche des durch $\alpha\,\beta$ bestimmten Parallelogramms.

Es ist $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $m^2 = n^2 = b^2 + c^2$, wenn $a\;b\;c$ die halben Kanten des Parallelepipedon sind; mithin

$$r^2 + m^2 - n^2 = \varkappa_1 = a^2 + b^2 + c^2,$$

worin die pag. 304 als Constante festgestellte Grösse wiederkehrt.

Dreieck $(M\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n})$ ist gleichschenklig, $(\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}) = 2c$, die zugehörige Höhe $= b$, mithin der Flächeninhalt des durch m und n bestimmten Parallelogramms $= 2bc$. Für das Parallelepiped $(r\;n\;m)$ ist die zugehörige Höhe $(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{n}) = a$, mithin

V. $rmn\,\sin(rmn) = \varkappa_2 = 2abc$. *D. h. auch das Volumen der auf dem gleichseitigen Hyperboloid zu verzeichnenden rechtwinkligen Parallelepipeda ist constant.*

$(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{n})$ ist senkrecht auf der Ebene $(M\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n})$; legt man also eine Ebene durch $(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{n}) \perp (M\,\mathfrak{m})$, welche $(M\,\mathfrak{m})$ in $\mathfrak{p}$ schneiden möge, so ist

$$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{p}) \perp (M\mathfrak{m}), \ (\mathfrak{n}\mathfrak{p}) \perp (M\mathfrak{m}), \ (\mathfrak{b}_2\mathfrak{n}) \perp (\mathfrak{p}\mathfrak{n});$$
$$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{p})^2 = (\mathfrak{b}_2\mathfrak{n})^2 + (\mathfrak{p}\mathfrak{n})^2,$$

folglich

$$m^2(\mathfrak{b}_2\mathfrak{p})^2 = m^2(\mathfrak{b}_2\mathfrak{n})^2 + m^2(\mathfrak{p}\mathfrak{n})^2,$$

und wegen $m = n$

$$m^2(\mathfrak{b}_2\mathfrak{p})^2 = n^2(\mathfrak{b}_2\mathfrak{n})^2 + m^2(\mathfrak{p}\mathfrak{n})^2,$$

oder

$$(r\,m \sin(r\,m))^2 - (m\,n \sin(m\,n))^2 - (n\,r \sin(n\,r))^2 = \varkappa_3 = 0.$$

Wenden wir diese Beziehungen auf die Halbaxen $A\ B\ C$ des Hyperboloids an, so ergiebt sich

$$A^2 + B^2 - C^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$A\,B\,C = 2\,a\,b\,c,$$
$$A^2B^2 - B^2C^2 - C^2A^2 = 0.$$

VI. *Die letzte Bedingung ist die für die Art des Hyperboloids charakteristische; sie lässt sich in die Formen*

$$(1.)\quad AB = C\sqrt{A^2+B^2} \qquad (2.)\quad \frac{C^2}{A^2} + \frac{C^2}{B^2} = 1 \qquad (3.)\quad \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} = 0$$

bringen.

Form (1.) sagt aus: Die imaginäre Axe des gleichseitigen Hyperboloids ist gleich der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die beiden reellen Axen sind. Form (2.) ergiebt: Sind φ, ϑ die Winkel, welche die imaginäre Axe gegen die den Axenschnitten (AC), (BC) angehörigen Asymptoten bildet, so ist

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\vartheta} = 1 \text{ oder } \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\vartheta = \operatorname{tg}^2\varphi \,.\, \operatorname{tg}^2\vartheta,$$

welches zugleich die für den gleichseitigen Kegel charakteristische Bedingung ist. Form (3.) entspricht der für die ebene gleichseitige Hyperbel geltenden Relation

$$\frac{1}{A^2} - \frac{1}{C^2} = 0\,^{*}),$$

sie ergiebt als Axengleichung des gleichseitigen Hyperboloids

$$\frac{x^2 - z^2}{A^2} + \frac{y^2 - z^2}{B^2} = 1.$$

---

*) *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. des Raumes Aufl. 2. Bd. 1 Art. 211.

Es tritt hier abermals ein Vergleich mit dem orthogonalen Hyperboloid nahe, dessen Axen an die Beschränkung

$$\frac{1}{A^2}-\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}=0$$

gebunden sind*), so dass seine Axengleichung

$$\frac{x^2+z^2}{A^2}+\frac{y^2-z^2}{B^2}=1$$

ist. Es zeigt sich, dass durch Vertauschung der imaginären und der kleineren reellen Axe beide Hyperboloide wechselweise in einander übergehen in ähnlicher Weise, wie in der Ebene durch Imaginärsetzen einer Axe aus dem Kreise eine gleichseitige Hyperbel wird, und umgekehrt.

§. 3. Das gleichseitige Rotationshyperboloid.

Nehmen wir an (S. Fig. 1), dass auf einem gleichseitigen Hyperboloid ein Tripel von Normalstrahlen $a\ b\ c$ vorhanden ist, deren gegenseitige Abstände gleich sind, so sind $\mathfrak{c}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{c}_1$ sechs Ecken eines Würfels. Fassen wir nun drei Strahlen des Hyperboloids $z\ x'\ y'$ auf, die wir dadurch definiren, dass

$$\frac{(\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_1)}{(\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{z}_1)}=\frac{(\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{x}_2)}{(\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{x}_2)}=\frac{(\mathfrak{c}\ \mathfrak{y})}{(\mathfrak{b}\ \mathfrak{y})}=\varkappa$$

sein soll; so schneidet offenbar z die Graden $a'\ b'\ c'$ in derselben Weise,
wie x' $b\ c\ a$
und y' $c\ a\ b$,
d. h. alle entsprechenden Strecken sind gleich, zum Beispiel

$$(\mathfrak{b}\ \mathfrak{x})=(\mathfrak{c}\ \mathfrak{z}_2),\quad (\mathfrak{b}\ \mathfrak{y})=(\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{z}_1).$$

Nun ist

$$\triangle\ (\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_1\ \mathfrak{z}_2)\backsim(\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{z}_1\ \mathfrak{z})\ \text{und}\ (\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_2\ \mathfrak{c})\backsim(\mathfrak{z}\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{a}_2),$$

folglich

$$\frac{(\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_1)}{(\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{z}_1)}=\frac{(\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_2)}{(\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{z})},\quad \frac{(\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_2)}{(\mathfrak{z}\ \mathfrak{b}_2)}=\frac{(\mathfrak{c}\ \mathfrak{z}_2)}{(\mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_2)}.$$

Es sind hierbei im ersten Dreieckspaare die Strecken $(\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_2)$ $(\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{z})$, im zweiten $(\mathfrak{b}\ \mathfrak{z}_2)$ $(\mathfrak{z}\ \mathfrak{b}_2)$ als entsprechend gesetzt, was einen Wechsel der

*) *Schröter*, dieses Journal Bd. 85 pag. 46.

positiven Richtung auf $(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z})$ bedeutet. Dies muss dadurch ausgeglichen werden, dass wir auch die Richtungen der andern Dreiecksseiten umkehren, also statt $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2)$ $(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{a}_2)$ setzen*). Alsdann ergiebt sich

$$\frac{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)}{(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1)} = \frac{(\mathfrak{c}\,\mathfrak{z}_2)}{(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2)},\quad (\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)\,.\,(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2) = -(\mathfrak{c}\,\mathfrak{z}_2)\,.\,(\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{z}_1),$$

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1)\,.\,(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2) + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{x})\,.\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}) = 0.$$

In ähnlicher Weise folgt

$$(\mathfrak{c}\,\mathfrak{z}_2)\,.\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1) + (\mathfrak{c}\,\mathfrak{x})\,.\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{y}) = 0.$$

Diese beiden Bedingungen sind nach pag. 302 hinreichend und nothwendig dafür, dass $x\,y'\,z'$ untereinander normal sind. Es schneiden also drei derselben Schaar angehörige normale Grade $x \quad y \quad z$ die Kanten $abc \quad bca \quad cab$ in gleichen Verhältnissen. Da nun die Kanten auf $x\,y\,z$ Sehnen der um $(\mathfrak{c}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{b}_2\;\mathfrak{a}_2\;\mathfrak{a}_1\;\mathfrak{c}_1)$ umschriebenen Kugel sind und innerhalb dieser Kugel unter gleichen Bedingungen gezogen sind, so sind sie untereinander gleich; das Parallelepipedon $(x\,y\,z)$ ist also ebenfalls ein Würfel, und da er derselben Kugel eingeschrieben ist, congruent $(a\;b\;c)$.

Da $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_2)$ und $(\eta\,\xi)$, $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1)$ und $(\eta\,\xi)$, $(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c})$ und $(\eta\,\xi)$ gleiche Sehnen von Kreisen sind, so ergiebt sich

$$(\mathfrak{z}_1\,\xi) = (\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{b}_2),\quad (\mathfrak{z}_1\,\eta) = (\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{b})$$
$$(\mathfrak{z}\,\xi) = (\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}_2),\quad (\mathfrak{z}\,\eta) = (\mathfrak{z}\,\mathfrak{a}_1)$$
$$(\mathfrak{z}_2\,\xi) = (\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{c}_1),\quad (\mathfrak{z}_2\,\eta) = (\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{c}).$$

Die beiden Würfel schneiden also gegenseitig ihre Kanten in gleichen Verhältnissen.

I. *Lassen sich auf einem Hyperboloid sechs Kanten eines Würfels aufzeichnen, so lassen sich ihm unendlich viele jenem congruente Würfel aufzeichnen; zwei beliebige unter ihnen schneiden gegenseitig ihre Kanten in gleichen Verhältnissen.*

Wählen wir als $x\;y\;z$ diejenigen Graden, welche durch die Mitten der Kanten des Würfels $(a\;b\;c)$ geben, so sind diese Punkte zugleich die

---

*) Derselbe Widerspruch zeigt sich aus demselben Grunde bei einem bekannten Satz für ein rechtwinkliges Dreieck $(\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{c})$, in dem die Höhe auf die Hypotenuse $(\mathfrak{c}\;\mathfrak{d})$ sei. Hier ist $\triangle\,(\mathfrak{a}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}) \backsim (\mathfrak{c}\;\mathfrak{b}\;\mathfrak{d})$, woraus $\frac{(\mathfrak{a}\;\mathfrak{b})}{(\mathfrak{b}\;\mathfrak{c})} = \frac{(\mathfrak{c}\;\mathfrak{b})}{(\mathfrak{b}\;\mathfrak{d})}$ und $(\mathfrak{c}\;\mathfrak{b})^2 = (\mathfrak{a}\;\mathfrak{b})\,.\,(\mathfrak{b}\;\mathfrak{d})$ folgen würde, was nicht richtig ist.

Mitten der Kanten von $(x\,y\,z)$. Eine Grade, welche den Würfelmittelpunkt M mit einer Kantenmitte verbindet, ist normal auf beiden Kanten, folglich auf deren Ebene, welche Tangentialebene des Hyperboloids im Kantenmittelpunkt ist.

Die Ebene der sechs Kantenmitten ist also Axenebene des Hyperboloids. Da aber jene sechs Punkte Ecken eines regulären Sechsecks sind, so ist der Axenschnitt des Hyperboloids ein Kreis, dasselbe ist also ein Rotationshyperboloid. Es folgt dies auch daraus, dass die zwölf in Betracht kommenden Ecken der beiden Würfel $(a\,b\,c)$ und $(x\,y\,z)$ zu je sechs auf zwei Kreise vertheilt sind, dass also die ihnen umschriebene Kugel das Hyperboloid in zwei Kreisen schneidet. Die Grade, welche die beiden nicht auf dem Hyperboloid liegenden Ecken des Würfels $(a\,b\,c)$ mit M verbindet, ist normal zu der durch die Mitten der sechs Kanten gehenden Ebene; sie ist identisch mit der hyperbolischen Axe des Hyperboloids, und die Eckenpaare aller auf dem Hyperboloid zu beschreibenden Würfel fallen auf ihr mit den beiden Ecken von $(a\,b\,c)$ zusammen.

II. *Ein Hyperboloid, auf dem sich sechs Kanten eines Würfels verzeichnen lassen, ist ein gleichseitiges Rotationshyperboloid; dasselbe wird erzeugt durch sechs Kanten eines Würfels, wenn derselbe um diejenige Grade als Axe rotirt, welche durch die beiden jenen sechs Kanten nicht angehörigen Gegenecken geht.*

Die hyperbolische Axe eines gleichseitigen Rotationshyperboloids ist gleich der halben Diagonale eines Quadrats, dessen Seite die reelle Axe ist. Seine Axengleichung ist

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = A^2.$$

§. 4. Beziehungen des gleichseitigen Hyperboloids zum Tetraeder.

Sind $(A\,\mathfrak{a}) = a$, $(B\,\mathfrak{b}) = b$, $(C\,\mathfrak{c}) = c$, $(D\,\mathfrak{d}) = d$ die Höhen eines Tetraeders $(A\,B\,C\,D)$, so sind die Projectionen von je dreien unter ihnen auf die durch ihre Ausgangspunkte bestimmte Tetraederfläche die Höhen dieser Fläche. Also die rechtwinkligen Projectionen von $a\,b\,c$ auf die Fläche $(A\,B\,C)$ schneiden sich im Höhenpunkt $\mathfrak{d}'$ des Dreiecks $(A\,B\,C)$.

Die in $\mathfrak{d}'$ auf $(A\,B\,C)$ errichtete Normale d' schneidet $a\ b\ c$ und ist parallel d. Dasselbe gilt für die drei andern Flächen; es sind also $a\ b\ c\ d$ Erzeugende eines Hyperboloids, die in den Höhenpunkten der Seiten errichteten Normalen $a'\ b'\ c'\ d'$ sind die zugehörigen Parallelstrahlen aus der andern Schaar*). Legt man durch (AD) (BD) (CD) Ebenen normal zu (BCD) (CAD) (ABD), so liegen a b c in diesen Ebenen, schneiden also sämmtlich die Schnittlinie derselben δ', welche wir als den Höhenstrahl der Ecke D bezeichnen. Die vier Höhenstrahlen $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ sind also ebenfalls Erzeugende des Hyperboloids.

Die Ebene $(A\,B\,C)$ schneidet das durch $a\ b\ c\ d$ bestimmte Hyperboloid in einer Curve, welcher die Punkte $A\ B\ C\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{d}'$ angehören. Diese Schnittcurve ist, da die Punkte $A\ B\ C\ \mathfrak{d}'$ im Verhältniss von Höhenpunkten zu einander stehen, eine gleichseitige Hyperbel; und weil $(ABC) \perp d'$, ist das Hyperboloid ein gleichseitiges.

Sind umgekehrt $b\ c\ d$ drei beliebige, derselben Schaar angehörige Strahlen eines gleichseitigen Hyperboloids, und schneidet man dieselben durch eine beliebige normal zu d gelegte Ebene in $B\ C\ \mathfrak{d}$, so ist die Schnittcurve eine gleichseitige Hyperbel. Schneidet der zu d parallele Strahl des Hyperboloids d' die Ebene $(B\ C\ \mathfrak{d})$ in $\mathfrak{d}'$, so liegt auch der Höhenpunkt A von $B\ C\ \mathfrak{d}'$ auf der Schnittcurve. Der durch A gehende, der Schaar $b\ c\ d$ angehörige Strahl des Hyperboloids a lehnt sich ebenso wie b und c an die durch den Höhenpunkt $\mathfrak{d}'$ von $A\ B\ C$ gehende Normale d' an; $a\ b\ c$ würden also Höhen eines Tetraeders sein, dessen drei fehlende Flächen sich durch $(A\ B)$ $(B\ C)$ $(C\ A)$ senkrecht zu c a b legen lassen. Die vierte Höhe dieses Tetraeders müsste der hyperboloidischen Schaar $a\ b\ c$ angehören und parallel d' sein, d. h. sie ist identisch mit d.

Drei beliebige Strahlen eines gleichseitigen Hyperboloids können also immer, wenn sie derselben Schaar angehören, als Tetraederhöhen

---

*) *Baltzer*, Elem. Buch 5, §. 6, 9 giebt die hierauf bezügliche Litteratur vollständig an. Wir verdanken diesen Satz *Steiner* und *Joachimsthal*.

gedacht werden. Das Tetraeder ist aber dadurch noch nicht vollständig bestimmt. Da $\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{D})$, $\boldsymbol{d} \perp (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A})$, so muss $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ parallel der kürzesten Entfernung der Graden $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{d}$ sein. Verschieben wir nun $\mathfrak{b}$ auf $\boldsymbol{d}$, also $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,\mathfrak{b})$ parallel mit sich selber, so bleibt, weil $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ sich nicht schneiden, $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ sich nicht parallel (sondern durchläuft ein hyperbolisches Paraboloid), folglich bleibt auch die kürzeste Entfernung der Strahlen $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{d}$ nicht dieselbe, es ändert sich also auch der Strahl $\boldsymbol{a}$ auf dem Hyperboloid. Die Richtung von $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{D})$ dagegen bleibt, da sie parallel der kürzesten Entfernung $(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ ist, constant, woraus sich ergiebt, dass $\boldsymbol{a}$ sämmtliche Strahlen des Hyperboloids durchläuft.

I. *Vier beliebige Erzeugende aus derselben Schaar eines gleichseitigen Hyperboloids sind immer Höhen eines Tetraeders. (Höhenstrahlen der Ecken eines Tetraeders, Normalen in den Höhenschnittpunkten der Flächen).*

II. *Drei Höhen eines Tetraeders (Höhenstrahlen der Ecken, Normalen in den Höhenpunkten der Seiten) erzeugen immer ein gleichseitiges Hyperboloid, dem auch die vierte Höhe (Höhenstrahl, Normale) angehört.*

Die Frage: Unter welcher Bedingung erzeugen drei Grade ein gleichseitiges Hyperboloid? ist identisch mit der anderen: Wann sind drei Grade Höhen eines Tetraeders?

Sind $\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}$ mit der kürzesten Entfernung $(\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2) = \boldsymbol{s}$ zwei beliebig im Raum liegende Strahlen, und ist $\boldsymbol{A}$ Ecke eines Tetraeders, für welches $\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}$ Höhen sind, so lege man durch $\boldsymbol{A}$ Ebenen $\perp$ $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$, welche sich in einer Graden $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{D}$ schneiden mögen;

die Ebene durch $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{b}$ schneide $\boldsymbol{c}$ in $\boldsymbol{C}$,
die durch $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{c}$ schneide $\boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{B}$,

so müssen sämmtliche durch $\boldsymbol{A}$ möglichen Tetraederhöhen $\boldsymbol{a}$, da sie normal zu einer $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ enthaltenden Ebene sein sollen, $\perp (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ sein. Alle durch einen Punkt $\boldsymbol{A}$ gehenden zu $\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}$ gehörigen dritten Höhen liegen in der Ebene, welche man durch $\boldsymbol{A}$ normal zu $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ legen kann.

III. *Aendert man die Lage von A im Raume, so füllen sämmtliche zu $b\,c$ zugehörigen Höhen einen Plückerschen Strahlencomplex ersten Grades,* dessen Charakteristikum eben dies ist, dass die durch einen Punkt des Raumes gehenden Strahlen in einer Ebene liegen, und wie sich daraus

Die in $\mathfrak{d}'$ auf (ABC) errichtete Normale d' schneidet $a\ b\ c$ und ist parallel d. Dasselbe gilt für die drei andern Flächen; es sind also $a\ b\ c\ d$ Erzeugende eines Hyperboloids, die in den Höhenpunkten der Seiten errichteten Normalen $a'\ b'\ c'\ d'$ sind die zugehörigen Parallelstrahlen aus der andern Schaar*). Legt man durch (AD) (BD) (CD) Ebenen normal zu (BCD) (CAD) (ABD), so liegen a b c in diesen Ebenen, schneiden also sämmtlich die Schnittlinie derselben δ', welche wir als den Höhenstrahl der Ecke D bezeichnen. Die vier Höhenstrahlen $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ sind also ebenfalls Erzeugende des Hyperboloids.

Die Ebene (ABC) schneidet das durch $a\ b\ c\ d$ bestimmte Hyperboloid in einer Curve, welcher die Punkte $A\ B\ C\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{d}'$ angehören. Diese Schnittcurve ist, da die Punkte $A\ B\ C\ \mathfrak{d}'$ im Verhältniss von Höhenpunkten zu einander stehen, eine gleichseitige Hyperbel; und weil $(ABC) \perp d'$, ist das Hyperboloid ein gleichseitiges.

Sind umgekehrt $b\ c\ d$ drei beliebige, derselben Schaar angehörige Strahlen eines gleichseitigen Hyperboloids, und schneidet man dieselben durch eine beliebige normal zu d gelegte Ebene in $B\ C\ \mathfrak{d}$, so ist die Schnittcurve eine gleichseitige Hyperbel. Schneidet der zu d parallele Strahl des Hyperboloids d' die Ebene $(B\ C\ \mathfrak{d})$ in $\mathfrak{d}'$, so liegt auch der Höhenpunkt A von $B\ C\ \mathfrak{d}'$ auf der Schnittcurve. Der durch A gehende, der Schaar $b\ c\ d$ angehörige Strahl des Hyperboloids a lehnt sich ebenso wie b und c an die durch den Höhenpunkt $\mathfrak{d}'$ von $A\ B\ C$ gehende Normale d' an; $a\ b\ c$ würden also Höhen eines Tetraeders sein, dessen drei fehlende Flächen sich durch $(A\ B)$ $(B\ C)$ $(C\ A)$ senkrecht zu c a b legen lassen. Die vierte Höhe dieses Tetraeders müsste der hyperboloidischen Schaar $a\ b\ c$ angehören und parallel d' sein, d. h. sie ist identisch mit d.

Drei beliebige Strahlen eines gleichseitigen Hyperboloids können also immer, wenn sie derselben Schaar angehören, als Tetraederhöhen

---

*) *Baltzer*, Elem. Buch 5, §. 6, 9 giebt die hierauf bezügliche Litteratur vollständig an. Wir verdanken diesen Satz *Steiner* und *Joachimsthal*.

gedacht werden. Das Tetraeder ist aber dadurch noch nicht vollständig bestimmt. Da $\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{D})$, $\boldsymbol{d} \perp (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A})$, so muss $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ parallel der kürzesten Entfernung der Graden $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{d}$ sein. Verschieben wir nun $\mathfrak{b}$ auf $\boldsymbol{d}$, also $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,\mathfrak{b})$ parallel mit sich selber, so bleibt, weil b und c sich nicht schneiden, $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ sich nicht parallel (sondern durchläuft ein hyperbolisches Paraboloid), folglich bleibt auch die kürzeste Entfernung der Strahlen $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{d}$ nicht dieselbe, es ändert sich also auch der Strahl a auf dem Hyperboloid. Die Richtung von $(A\,\boldsymbol{D})$ dagegen bleibt, da sie parallel der kürzesten Entfernung $(b\ c)$ ist, constant, woraus sich ergiebt, dass a sämmtliche Strahlen des Hyperboloids durchläuft.

I. *Vier beliebige Erzeugende aus derselben Schaar eines gleichseitigen Hyperboloids sind immer Höhen eines Tetraeders. (Höhenstrahlen der Ecken eines Tetraeders, Normalen in den Höhenschnittpunkten der Flächen).*

II. *Drei Höhen eines Tetraeders (Höhenstrahlen der Ecken, Normalen in den Höhenpunkten der Seiten) erzeugen immer ein gleichseitiges Hyperboloid, dem auch die vierte Höhe (Höhenstrahl, Normale) angehört.*

Die Frage: Unter welcher Bedingung erzeugen drei Grade ein gleichseitiges Hyperboloid? ist identisch mit der anderen: Wann sind drei Grade Höhen eines Tetraeders?

Sind $b\ c$ mit der kürzesten Entfernung $(\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2) = s$ zwei beliebig im Raum liegende Strahlen, und ist A Ecke eines Tetraeders, für welches $b\ c$ Höhen sind, so lege man durch A Ebenen $\perp$ b und c, welche sich in einer Graden $A\,\boldsymbol{D}$ schneiden mögen;

die Ebene durch $A \perp b$ schneide c in $\boldsymbol{C}$,
die durch $A \perp c$ schneide b in $\boldsymbol{B}$,

so müssen sämmtliche durch A möglichen Tetraederhöhen a, da sie normal zu einer $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ enthaltenden Ebene sein sollen, $\perp (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ sein. Alle durch einen Punkt A gehenden zu $b\ c$ gehörigen dritten Höhen liegen in der Ebene, welche man durch A normal zu $(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ legen kann.

III. *Aendert man die Lage von A im Raume, so füllen sämmtliche zu $b\ c$ zugehörigen Höhen einen Plückerschen Strahlencomplex ersten Grades,* dessen Charakteristikum eben dies ist, dass die durch einen Punkt des Raumes gehenden Strahlen in einer Ebene liegen, und wie sich daraus

§. 5. Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid.

Unter den Strahlen des nach Massgabe des vorigen Paragraphen durch zwei Grade $b\ c$ bestimmten Complexes befinden sich auch alle diejenigen, welche die kürzeste Entfernung von b und c, die wir jetzt s' nennen wollen, rechtwinklig schneiden. Ist a ein solcher Strahl, so dass s' also $a\ b\ c$ rechtwinklig schneidet, so geht das durch $a\ b\ c$ bestimmte Hyperboloid in ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid über, dessen der Schaar $a\ b\ c$ angehörige Erzeugende sämmtlich normal zu s' sind. Alle Erzeugenden der andern Schaar sind normal zu einer der Schaar $a\ b\ c$ angehörigen Graden s. Der Schnittpunkt $(s\ s')$ ist der Scheitel S des Paraboloids*).

Es leuchtet ein, dass das gleichseitige hyperbolische Paraboloid der für das gleichseitige Hyperboloid aufgestellten Definition entspricht. Zu jedem Strahl x ist ein normaler y vorhanden, da ja die der Schaar $a\ b\ c$ angehörigen Erzeugenden sämmtliche zu s' normale Richtungen durchlaufen; wir haben also unendlich viele Tripel von Normalstrahlen $x\ y\ s'$, von denen immer zwei einer Schaar angehören; der dritte ist der Scheitelstrahl der andern Schaar. Es sind von den sechs Kanten der auf einem gleichseitigen Hyperboloid zu verzeichnenden rechtwinkligen Parallelepipeda nur drei aneinander stossende endlich geblieben. Eine normal zu x gelegte Ebene schneidet das Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen $y\ s'$ sind. Eine normal zu s' gelegte Ebene schneidet das Paraboloid in einer Graden der Schaar $a\ b\ c$ und in der der andern Schaar angehörigen unendlich fernen Erzeugenden. Dieser Schnitt kann sowohl als Ausartung der gleichseitigen Hyperbel wie des Kreises aufgefasst werden, so dass das gleichseitige hyperbolische Paraboloid als Specialität des gleichseitigen und des orthogonalen Hyperboloids auftritt**).

Zwei Paar Normalstrahlen $x\ y$, $x'\ y'$ aus den beiden Schaaren des Paraboloids sind Gegenkantenpaare eines Tetraeders, dessen Höhen sich in einem Punkte S, dem Schnittpunkt der kürzesten Entfernungen $s\ s'$

*) *Steiner*, System. Entw. pag. 210.
**) *Schröter*, dieses Journal Bd. 85.

der Gradenpaare $x\,y$, $x'\,y'$ schneiden. Setzen wir die Punkte

$$(x\,x') = \mathfrak{x},\quad (x\,y') = \mathfrak{y},\quad (x\,s') = \mathfrak{s}$$
$$(y\,x') = \mathfrak{x}_1,\quad (y\,y') = \mathfrak{y}_1,\quad (y\,s') = \mathfrak{s}_1$$
$$(x'\,s) = \mathfrak{s}',\quad (y'\,s) = \mathfrak{s}_1',$$

so ist

$$(S\,\mathfrak{s})\,.\,(S\,\mathfrak{s}_1) = (S\,\mathfrak{s}')\,.\,(S\,\mathfrak{s}_1')$$
$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{x})\,.\,(\mathfrak{s}\,y) = -\,(\mathfrak{s}\,S)\,.\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}_1)\,^*).$$

Variiren wir also das Strahlenpaar $x'\,y'$, so sind $\mathfrak{s}'\,\mathfrak{s}_1'$ auf s und $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ auf x Punktepaare von Involutionen mit den Mittelpunkten S und $\mathfrak{s}$.

Die Ebenen $(s\,x')$ und $(s\,y')$ sind Paare einer Ebeneninvolution mit der Axe s, und zwar ist diese Ebeneninvolution ein Kreissystem; demgemäss bilden die Punktepaare $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$, in denen x diese Ebenen durchbohrt, eine elliptische Involution, d. h. $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ sind immer durch $\mathfrak{s}$ getrennt. Hieraus ergiebt sich auch, dass S die Punktepaare $\mathfrak{s}'\,\mathfrak{s}_1'$ trennt.

I. *Die Paare von Normalstrahlen aus einer Schaar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids schneiden auf sämmtlichen Strahlen der andern Schaar elliptische Involutionen aus, deren Mittelpunkt der jedesmalige Durchschnitt mit dem Scheitelstrahl ist. Die Potenz auf einem Strahl x ist gleich dem negativ genommenen Rechteck aus den Abständen des Strahls x von dem zugehörigen Normalstrahl y und dem Scheitelstrahl s.*

Es ergeben sich leicht Ausdrücke der Abhängigkeit der Potenz auf einem Strahl x von der auf dem Scheitelstrahl: Setzen wir letztere $= -\,\mu^2$, so ist

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{x})\,.\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{y}) = -\,(\mathfrak{s}\,S)\,.\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}_1) = -\,(\mathfrak{s}\,S)\,.\,(\mathfrak{s}\,S + S\,\mathfrak{s}_1)$$
$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{x})\,.\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{y}) = -\,\delta^2 - \mu^2,$$

wo δ der Abstand des Strahls x vom Scheitel ist.

$(S\,\mathfrak{s}')$ und $(S\,\mathfrak{s}_1')$ sind die Normalprojectionen von $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{y})$ auf s; setzen wir

$$\measuredangle\,(x\,s) = \alpha,$$

so ist

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{x})\,.\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{y}) = \frac{(S\,\mathfrak{s}')\,.\,(S\,\mathfrak{s}_1')}{\cos^2\alpha} = -\,\frac{\mu^2}{\cos^2\alpha}\,.$$

Aus der Zusammenstellung beider Relationen folgt

$$\delta^2 = \mu^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right),\quad \delta = \pm\,\mu\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

---

*) S. pag. 301 und 304.

II. *Wir können das gleichseitige hyperbolische Paraboloid als eine Schraubenfläche auffassen, welche entsteht, wenn eine Grade x sich rechtwinklig an einer Leitlinie s' entlang schiebt, so dass die trigonometrische Tangente des Winkels gegen eine Anfangslage s der Entfernung von dieser Anfangslage proportional ist.*

Wählen wir für x denjenigen Strahl, welcher gegen s den Winkel $\alpha = 45^0$ bildet, also $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\delta = \mu$. t sei der Punkt, in welchem er die Ebene durchbohrt, die den Winkel $(s\, s')$ halbirt, d. h. ein Punkt der Scheitelparabel. Die genannte Ebene schneide die Ebene $(s\, s')$ in η, die von t auf $(s\, s')$ gefällte Normale ξ treffe η in t_1, so ist

$$\measuredangle\, (\mathfrak{s}\, S\, t_1) = (\mathfrak{s}\, t_1\, S) = (t_1\, \mathfrak{s}\, t) = (t_1\, t\, \mathfrak{s}) = 45^0,$$

also

$$\xi = (t_1\, \mathfrak{s}) = \delta = \eta \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Da $\xi\, \eta$ Abscisse und Ordinate der Parabel für ihre Scheitelgleichung $\eta^2 = 2p\xi$ sind, so ist ξ wegen $\eta^2 = 2\xi^2$ gleich dem Parameter p derselben, folglich auch $\mu = p$.

Die Potenz der Involution auf einem Scheitelstrahl ist gleich dem negativ genommenen Quadrat des Parameters der Scheitelparabel.

Breslau, den 26. November 1878.

Ueber eine Beziehung der complexen Multiplication der elliptischen Integrale zur Reduction gewisser Klassen Abelscher Integrale auf elliptische.

(Von Herrn *L. Königsberger* in Wien.)

Die Fragen, welche die Beziehungen *Abel*scher Integrale unter einander oder die Reduction von einzelnen Integralen algebraischer Functionen gewisser Irrationalität auf solche niederer Irrationalität betreffen, sind bisher nur in sehr vereinzelten Fällen in Angriff genommen worden, und es darf in diesem Augenblicke nur die Untersuchung der auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbaren hyperelliptischen Integrale als erledigt betrachtet werden. Für die auf elliptische Integrale reducirbaren hyperelliptischen Integrale, unter denen bekanntlich von *Legendre* und *Jacobi* zuerst einige Fälle von Integralen erster Ordnung gefunden und von *Hermite* vor Kurzem zwei derselben Ordnung angehörige auf elliptische Integrale zurückführbare aufgestellt worden, habe ich im 85. Bande dieses Journals mit Hülfe der Reduction der allgemeinen Transformation auf eine rationale die Möglichkeit gezeigt, beliebig viele solcher hyperelliptischen Integrale herzustellen. Bei Gelegenheit dieser letzteren Untersuchung sah ich die bisher gefundenen, auf elliptische Integrale reducirbaren *Abel*schen Integrale durch, von denen hauptsächlich nur die beiden, wesentlich von *Legendre* gefundenen Integralklassen

$$(a) \qquad \int \frac{f(z)\,dz}{(\sqrt[3]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3})^m}$$

und

$$(b) \qquad \int \frac{f(z)\,dz}{(\sqrt[4]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4})^\mu}$$

existiren, in denen f eine rationale Function, m die Zahlen 1 oder 2,

μ die Zahlen 1 oder 3 bedeuten, und fand in einer im 56. Bande dieses Journals veröffentlichten Arbeit von *Roethig* den durch Ausführung der *Legendre*schen Transformation hergeleiteten Satz, dass sich die Integrale von der Form (*a*) auf elliptische Integrale bringen lassen, deren Modul $\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ ist, und die Integrale von der Form (*b*) auf elliptische Integrale mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Dieses letztere Resultat liess mich erkennen, dass die Frage der Reduction dieser Art *Abel*scher Integrale mit der complexen Multiplication der elliptischen Integrale in Verbindung steht, und ich erlaube mir im Nachstehenden einige Bemerkungen, die ich bei der Behandlung dieser Frage machte, zu veröffentlichen.

Sei

$$(1.)\qquad R(z) = (z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_\varrho)^{m_\varrho},$$

und werde eine Beziehung zwischen einem zur Irrationalität $\sqrt[n]{R(z)}$ gehörigen *Abel*schen Integrale, elliptischen Integralen, logarithmischen und algebraischen Functionen vorausgesetzt, in welcher die oberen Grenzen der elliptischen Integrale und die Argumente der Logarithmen algebraisch mit der oberen Grenze des *Abel*schen Integrales verbunden sind, so ist nach einem allgemeinen, für die zwischen *Abel*schen Integralen stattfindenden algebraischen Beziehungen gültigen Satze diese Relation jedenfalls eine lineare von der Form

$$(2.)\qquad \int^{z_1} F(z,\sqrt[n]{R(z)})dz = \int^{x_1} f_1(x,\sqrt{\varphi_1(x)})dx + \int^{x_2} f_2(x,\sqrt{\varphi_2(x)})dx + \dots + \int^{x_r} f_r(x,\sqrt{\varphi_r(x)})dx$$
$$+ u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \dots + A_\nu\log v_\nu,$$

worin

$$F,\ f_1,\ f_2,\ \dots f_r$$

rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen,

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots\ \varphi_r(x)$$

ganze Polynome vierten Grades von der Form

$$\varphi_\alpha(x) = (1-x^2)(1-\varkappa_\alpha^2 x^2),$$

und

$$x_1,\ x_2,\ \dots x_r,\ u,\ v_1,\ v_2,\ \dots\ v_\nu$$

algebraische Functionen von z_1 bedeuten.

Nach einem bekannten Satze von *Abel* folgt, dass die Gleichung (2.) eine andere von der Form

$$(3.)\quad \delta\int^{z_1} F(z,\sqrt[n]{R(z)})\,dz = \int^{y_1} f_1(y,\sqrt{\varphi_1(y)})\,dy + \int^{y_2} f_2(y,\sqrt{\varphi_2(y)})\,dy + \cdots + \int^{y_r} f_r(y,\sqrt{\varphi_r(y)})\,dy$$
$$+ U + B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \cdots + B_\mu \log V_\mu$$

nach sich zieht, in welcher

$$y_1, y_2, \ldots y_r,\ \sqrt{\varphi_1(y_1)},\ \sqrt{\varphi_2(y_2)}, \ldots \sqrt{\varphi_r(y_r)}$$
$$U,\ V_1,\ V_2, \ldots V_\mu$$

rationale Functionen von

$$z_1 \text{ und } \sqrt[n]{R(z_1)}$$

bedeuten.

Ist nun y_α eine rationale Function von z_1 und $\sqrt[n]{R(z_1)}$ und zwar von der Art, dass $\sqrt{\varphi_\alpha(y_\alpha)}$ ebenfalls rational durch diese Grössen ausdrückbar ist, so folgt

$$dy_\alpha = F_\alpha(z_1, \sqrt[n]{R(z_1)})\,dz_1,$$

wenn F_α eine rationale Function bedeutet, und daher

$$\frac{dy_\alpha}{\sqrt{\varphi_\alpha(y_\alpha)}} = \Phi_\alpha(z_1, \sqrt[n]{R(z_1)})\,dz_1$$

oder

$$(4.)\quad \int^{y_\alpha} \frac{dy}{\sqrt{\varphi_\alpha(y)}} = \int^{z_1} \Phi_\alpha(z, \sqrt[n]{R(z)})\,dz,$$

worin Φ_α ebenfalls eine rationale Function vorstellt, d. h.

Wenn eine Gleichung von der Form (2.) *besteht, so müssen zur Irrationalität* $\sqrt[n]{R(z)}$ *gehörige Integrale erster Gattung existiren, welche auf je ein der zu den elliptischen Integralen der rechten Seite von* (2.) *gehörigen Integrale erster Gattung reducirbar sind.*

Dieser Satz lässt sich, ähnlich wie ich es für jede Relation zwischen hyperelliptischen Integralen gethan (siehe meine „Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale“) auf eine beliebige Relation zwischen verschiedenen *Abel*schen, elliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen ausdehnen.

Stellen wir zuerst die Form der zur Irrationalität

$$\sqrt[n]{R(z)} = \sqrt[n]{(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\dots(z-\alpha_\varrho)^{m_\varrho}}$$

gehörigen Integrale erster Gattung fest, wobei wir offenbar annehmen dürfen, dass die Zahlen

$$n,\ m_1,\ m_2,\ \dots m_\varrho$$

keinen gemeinsamen Theiler haben, so werden sich dieselben zunächst in der allen zu dieser Irrationalität gehörigen Integralen gemeinsamen Form schreiben lassen

$$(A)\qquad \int\left[\psi_0(z)+\psi_1(z)\sqrt[n]{R(z)}+\psi_2(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^2+\dots+\psi_{n-1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{n-1}\right]dz,$$

in welcher

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z),\dots\psi_{n-1}(z)$$

rationale Functionen von z bedeuten.

Umkreist nun z den Punkt α_1 $k_1$mal, den Punkt α_2 $k_2$mal u. s. w., endlich den Punkt α_ϱ $k_\varrho$mal, so wird die Irrationalität $\sqrt[n]{R(z)}$ den Factor

$$e^{\frac{2\pi i}{n}(k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_\varrho m_\varrho)}$$

erhalten, und man sieht sogleich, dass man unter der oben gemachten Voraussetzung, dass $n, m_1, m_2, \dots m_\varrho$ keinen gemeinsamen Theiler haben, die Zahlen $k_1, k_2, \dots k_\varrho$ so wählen kann, dass jener Exponentialfactor eine beliebige $n$te Einheitswurzel darstellt; die Gleichung

$$w^n = R(z)$$

ist somit eine irreductible, oder die diese Function darstellende Fläche ist so beschaffen, dass ihre Blätter stets in Verzweigungsschnitten mit einander zusammenhängen, oder dass man von irgend einem Flächentheile aus in Fortsetzungen durch Flächen zu jedem Theile der gesammten *Riemann*schen Fläche gelangen kann.

Ist nun der Ausdruck (A) ein Integral erster Gattung, und ist α die primitive $n$te Einheitswurzel

$$e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

so wird auch das Integral

$$(B)\qquad \int\left[\psi_0(z)+\alpha^k\psi_1(z)\sqrt[n]{R(z)}+\alpha^{2k}\psi_2(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^2+\dots+\alpha^{(n-1)k}\psi_{n-1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{n-1}\right]dz$$

ein solches sein, was auch k für eine ganze Zahl bedeuten mag, und daher auch jedes einzelne der Integrale

$$\int \psi_0(z)\,dz, \int \psi_1(z)\sqrt[n]{R(z)}\,dz, \ldots \int \psi_{n-1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{n-1} dz,$$

woraus unmittelbar als Integral einer rationalen Function, welches nie erster Gattung sein kann,

$$\int \psi_0(z)\,dz = 0$$

folgt*).

Wir haben uns somit nur die Frage nach der Beschaffenheit der Integrale erster Gattung von der Form

$$(C) \qquad \int \psi_r(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz$$

vorzulegen, da sich aus diesen Fundamentalintegralen jedes Integral erster Gattung zusammensetzt.

Soll aber das Integral (C) ein Integral erster Gattung sein, so müssen bekanntlich, wenn

$$\psi_r(z) = \frac{\varphi_r(z)}{\chi_r(z)}$$

gesetzt wird, wobei $\varphi_r(z)$ und $\chi_r(z)$ ohne gemeinsamen Theiler angenommen werden, die Nullwerthe von $\chi_r(z)$ zu den Verzweigungswerthen von $\sqrt[n]{R(z)}$ gehören, und wenn α_σ einer dieser Verzweigungswerthe ist, so muss

*) Es ist dies ein specieller Fall des unmittelbar als richtig einleuchtenden Satzes, dass, wenn

$$\int y_1\,dx$$

ein *Abel*sches Integral erster Gattung bedeutet, worin y_1 eine Lösung der algebraischen Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

sein soll, und man bezeichnet die andern Lösungen der in y vom $r$ten Grade vorausgesetzten Gleichung mit

$$y_2, y_3, \ldots y_r,$$

die Summe der Integrale

$$\int y_1\,dx + \int y_2\,dx + \cdots + \int y_r\,dx = 0$$

sein muss, weil sie das Integral einer rationalen Function von x darstellt, welches nothwendig unendlich werden muss.

$$\left[(z-\alpha_\sigma)\frac{\varphi_r(z)}{\chi_r(z)}\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r\right]_{z=\alpha_\sigma}=0$$

sein, woraus, wenn

$$\chi_r(z)=(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}\ldots(z-\alpha_\varrho)^{n_\varrho}$$

gesetzt wird,

$$\frac{rm_1}{n}-n_1+1>0,\ \frac{rm_2}{n}-n_2+1>0,\ldots\frac{rm_\varrho}{n}-n_\varrho+1>0,$$

d. h.

$$n_1<\frac{rm_1}{n}+1,\ n_2<\frac{rm_2}{n}+1,\ \ldots\ n_\varrho<\frac{rm_\varrho}{n}+1$$

folgt, so dass, da offenbar

$$m_1<n,\ m_2<n,\ldots m_\varrho<n$$

angenommen werden darf, die Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_\varrho$ ebenfalls unter n liegen werden.

Damit aber das Integral (C) auch nicht für unendlich grosse z unendlich wird, muss ferner

$$\left[z\frac{\varphi_r(z)}{\chi_r(z)}\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r\right]_{z=\infty}=0$$

sein, und daher, wenn der Grad von $\varphi_r(z)$ mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet wird,

$$\mathfrak{r}<\left(n_1-\frac{rm_1}{n}\right)+\left(n_2-\frac{rm_2}{n}\right)+\cdots+\left(n_\varrho-\frac{rm_\varrho}{n}\right)-1$$

sein müssen, so dass sich vermöge der früheren Ungleichheiten jedenfalls

$$\mathfrak{r}<\varrho-1$$

ergiebt.

Durch diese Bedingungen für die Exponenten $n_1, n_2, \ldots n_\varrho$ der Linearfactoren des Nenners $\chi_r(z)$ und den Grad $\mathfrak{r}$ des Zählers $\varphi_r(z)$ sind die Fundamentalintegrale erster Gattung charakterisirt und unmittelbar aufzustellen.

Ist nun die Form der Fundamentalintegrale erster Gattung gefunden, so kann man die Frage, auf welche die Untersuchung der allgemeinsten algebraischen Beziehung dieser Art *Abel*scher Integrale, elliptischer Integrale und algebraisch-logarithmischer Functionen reducirt worden ist,

in der Form stellen, dass man diejenigen Fundamentalintegrale zu charakterisiren sucht, für welche

$$\int \psi_r(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}},$$

$$\int \psi_r(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz + \int \psi_s(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^s dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}},$$

. . . .

$$\int \psi_1(z) \sqrt[n]{R(z)}\, dz + \int \psi_2(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^2 dz + \cdots + \int \psi_{n-1}(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{n-1} dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

wird, wenn $\varphi(y)$ ein Polynom vierten Grades von der Gestalt bedeutet:

$$\varphi(y) = (1 - y^2)(1 - \varkappa^2 y^2).$$

Wir beschäftigen uns mit der ersten Frage, welche die Gleichung zum Gegenstande hat

$$\int \psi(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}, \tag{5.}$$

in welcher $\psi(z)$ der Bedingung unterliegt, dass das Integral der linken Seite ein Integral erster Gattung sei; es sind die beiden oben bezeichneten Fälle von *Legendre* bekannt, in welchen *alle* zur Irrationalität

$$\sqrt[3]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3}$$

gehörigen *Abel*schen Integrale durch die Substitution

$$y = \frac{\sqrt[3]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3}}{a_3(z - \alpha)},$$

wenn α einen Nullwerth der Irrationalität bedeutet, auf elliptische Integrale mit einer Irrationalität von der Form

$$\sqrt{A + By^3}$$

zurückgeführt werden (wie dies wegen $p = 1$ sein muss), und ferner die zur Irrationalität

$$\sqrt[4]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4}$$

oder

$$\sqrt[4]{(1 - z^2)(1 - \lambda^2 z^2)}$$

gehörigen Integrale durch die Substitutionen

$$x = z, \quad x = \frac{\sqrt[4]{(1 - z^2)(1 - \lambda^2 z^2)}}{z}, \quad x = \sqrt[4]{(1 - z^2)(1 - \lambda^2 z^2)}$$

auf elliptische Integrale mit den resp. Irrationalitäten

$$\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)}, \quad \sqrt{(1-\lambda^2)^2+4x^4}, \quad \sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2 x^4}$$

sich reduciren lassen. Auf die weitere von *Röthig* vorgenommene Reduction dieser beiden Integralklassen auf gewisse Normalformen komme ich später.

Ich will der folgenden Untersuchung wegen unter anderen noch *einen* Fall der Reduction hervorheben, welcher sich auf die zur Irrationalität

$$\sqrt[6]{a+2bz+cz^2}$$

gehörigen Fundamentalintegrale bezieht; die einzigen zu dieser Irrationalität gehörigen Fundamentalintegrale erster Gattung sind dargestellt durch

$$J_1 = \int \frac{dz}{(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2})^4} = \int \frac{dz}{(\sqrt[3]{a+2bz+cz^2})^2}$$

und

$$J_2 = \int \frac{dz}{(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2})^5};$$

wendet man auf diese die gemeinschaftliche Substitution

$$a+2bz+cz^2 = x^3$$

an, so folgt unmittelbar die Darstellung dieser beiden Integrale als elliptische Integrale in der Form

$$J_1 = \tfrac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+(x^3-a)c}}, \quad J_2 = \tfrac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(b^2+(x^3-a)c)}}.$$

Gehen wir nun zur Betrachtung der Gleichung (5.) oder der entsprechenden Differentialgleichung

$$(6.) \qquad \psi(z)\,(\sqrt[n]{R(z)})^r dz = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

über, in welcher, wie schon oben hervorgehoben worden, y und $\sqrt{\varphi(y)}$ als rationale Functionen von z und $\sqrt[n]{R(z)}$ angesehen werden dürfen, und lassen z irgend einen geschlossenen Weg von einem willkürlichen Werthe aus bis zu diesem zurück beschreiben, so wird man, wie früher erwähnt, diesen Umkreis stets so wählen können, dass $\sqrt[n]{R(z)}$ für eine beliebig vorgelegte Zahl μ den Factor

$$e^{\frac{2\mu\pi i}{n}}$$

erhält, und bestimmt man nun μ derart, dass

$$(\mu r \equiv 1 \text{ mod. } n)$$

ist, was stets möglich ist, da wir n und r als relativ prim voraussetzen dürfen, so wird für die so gewählte Umkreisung die linke Seite der Gleichung (6.) den Factor

$$e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

erhalten haben, während die Grössen y und $\sqrt{\varphi(y)}$, welche rational von z und $\sqrt[n]{R(z)}$ abhingen, in

$$\eta \text{ und } \sqrt{\varphi(\eta)}$$

übergehen mögen. Es wird sich daher der Gleichung (6.) analog die Beziehung ergeben

$$(7.) \qquad \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}\right)\psi(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz = \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}},$$

und aus (6.) und (7.)

$$(8.) \qquad \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}\right)\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

folgen; beachtet man sodann, dass, weil y und η algebraische Functionen von z sind, y und η ebenfalls durch eine algebraische Gleichung mit einander verbunden sind, so ergiebt sich der Satz,

dass der Modul des elliptischen Integrales, auf welches ein Abelsches Fundamentalintegral der obigen Art reducirbar ist, ein Modul der complexen Multiplication sein muss.

Setzen wir in gewohnter Bezeichnungsweise

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}, \quad \omega' = 2\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} - 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

so müssen nach bekannten, in der Transformationstheorie geläufigen Schlüssen vermöge der algebraischen Beziehung zwischen y und η, wenn

$$m,\ m',\ r,\ s,\ r',\ s'$$

ganze Zahlen bedeuten, Gleichungen von der Form bestehen

$$(9.) \qquad \begin{cases} m\,\omega = ar\omega + as\omega' \\ m'\omega' = ar'\omega + as'\omega', \end{cases}$$

worin a den Multiplicator bedeutet, oder, wenn der durch die Gleichung

$$\tau = \frac{2\omega'}{\omega}$$

definirte ϑ-Modul eingeführt wird, für welchen — was durch die Wahl der Fundamentalperioden ermöglicht wird — der Coefficient von i eine wesentlich positive Zahl sein wird, die Beziehung

$$(10.) \qquad \frac{m'}{m}\tau = \frac{4r' + 2s'\tau}{2r + s\tau},$$

aus welcher sich τ, wie bekannt, als Lösung einer quadratischen Gleichung

$$sm'\tau^2 + 2(rm' - ms')\tau - 4r'm = 0$$

in der Form ergiebt

$$\tau = \frac{-(rm' - ms') + \sqrt{(rm' - ms')^2 + 4r'smm'}}{sm'}$$

$$= \frac{-(rm' - ms') + \sqrt{(rm' + ms')^2 - 4(rs' - r's)mm'}}{sm'},$$

worin

$$4(rs' - r's)mm' > (rm' + m's)^2$$

sein muss.

Ferner folgt aus den Gleichungen (9.)

$$(11.) \qquad a = \frac{2m\omega}{2r\omega + 2s\omega'} = \frac{2m}{2r + s\tau} = \frac{1}{2(rs' - r's)}(2ms' - sm'\tau),$$

und hieraus der bekannte Satz von *Abel, dass der Multiplicator der complexen Multiplication von der Form sein muss*

$$A + i\sqrt{B},$$

worin A und B rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere wesentlich positiv ist.

Soll die Beziehung zwischen den Grenzen der Integrale eine *rationale* sein, so wird, wie in der Transformationstheorie näher ausgeführt wird,

$$m = m' = 1$$

genommen werden müssen, und daher in diesem Falle

$$\frac{1}{a} = r + s\frac{\tau}{2} = \frac{r + s'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(r - s')^2 + 4r's},$$

und dieser Werth somit, wenn reell also $s = 0$, eine *ganze* Zahl, und wenn complex, von der Form

$$\frac{1}{2}(\alpha + i\sqrt{\beta}),$$

worin α und β ganze Zahlen bedeuten, von denen die letztere wieder wesentlich positiv sein muss.

Es ist nun auf Grund dieser Herleitung auch leicht festzustellen, in welcher Beziehung zu einander verschiedene complexe Multiplicationsmoduln stehen müssen, wenn der Multiplicator a für diese Moduln derselbe sein soll, oder wenn die beiden Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda_1^2 t^2)}} = \dfrac{a\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda_1^2 u^2)}}, \\ \dfrac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda_2^2 v^2)}} = \dfrac{a\,dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-\lambda_2^2 w^2)}}, \end{cases}$$

in welchen u mit t, ebenso wie w mit v algebraisch verbunden sind, zu gleicher Zeit bestehen sollen; denn da sich dann, wenn der zum Modul λ_1 gehörige ϑ-Modul mit τ_1, der zu λ_2 gehörige mit τ_2 bezeichnet wird, aus (11.) vermöge der Gleichheit der Multiplicatoren die Beziehung ergiebt

$$\frac{2m_1}{2r_1+s_1\tau_1} = \frac{2m_2}{2r_2+s_2\tau_2},$$

in welcher die der Transformation zugehörigen ganzen Zahlen mit entsprechenden Indices versehen sind, so folgt

$$(13.)\quad \tau_2 = \frac{2(r_1m_2-r_2m_1)+m_2s_1\tau_1}{m_1s_2},$$

und somit τ_2 als lineare Function von τ_1. Da nun, wie wir wissen, der reelle Theil von $\frac{\tau_1}{i}$ und $\frac{\tau_2}{i}$ wesentlich positiv ist, und diese beiden reellen Theile sich nach (13.) um den Factor

$$\frac{m_2\,s_1}{m_1\,s_2}$$

unterscheiden, so wird dieser Factor ebenfalls positiv sein, und somit, wenn in bekannter Bezeichnungsweise

$$\tau_2 = \frac{b_0-a_0\tau_1}{a_1\tau_1-b_1}$$

gesetzt wird, in unserem Falle

$$a_0b_1-a_1b_0 = m_1m_2s_1s_2 = N$$

eine *positive ganze* Zahl sein; nach einem bekannten Satze der Transformationstheorie ist dann aber τ_2 ein durch eine Transformation Nten Grades

aus τ_1 transformirter ϑ-Modul, und es folgt somit, dass die beiden Moduln λ_1 und λ_2 der complexen Multiplication der Gleichungen (12.) aus einander transformirte Integralmoduln sein müssen, dass also

gleiche Multiplicatoren nur dann zwei verschiedenen Moduln der complexen Multiplication zugehören können, wenn die Moduln in einander transformirbare sind,

oder endlich, dass, wenn wir transformirte Integralmoduln als gleich betrachten,

jedem Multiplicatorwerth einer complexen Multiplication nur ein Integralmodul entsprechen wird.

Zugleich mag hier noch eine weitere Bemerkung angefügt werden, die wir im Folgenden brauchen werden; es soll nämlich untersucht werden, in welcher Beziehung zwei Multiplicatoren a und a_1 zu einander stehen, welche durch die beiden Gleichungen

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} = \frac{a\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2 u^2)}},$$
$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} = \frac{a_1 dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}}$$

definirt sind, welche also für ein λ complexer Multiplication dasselbe Integral auf zwei verschiedene mit demselben Modul zurückführen, vorausgesetzt, dass sowohl u mit t als auch v mit t in algebraischer Beziehung stehen.

Nun gelten aber nach (11.), da τ in beiden Fällen dasselbe ist, mit analoger Bezeichnung der Transformationszahlen die Gleichungen

$$a = \frac{1}{2(rs'-r's)}(2ms' - sm'\tau)$$
$$a_1 = \frac{1}{2(r_1 s_1' - r_1' s_1)}(2m_1 s_1' - s_1 m_1' \tau),$$

aus denen durch Elimination von τ unmittelbar

$$a_1 = \frac{m_1 m' s s_1' - m m_1' s_1 s'}{sm'(r_1 s_1' - r_1' s_1)} + \frac{s_1 m_1'}{sm'} \frac{rs' - r's}{r_1 s_1' - r_1' s_1} \cdot a$$

folgt;

die verschiedenen Multiplicatoren, welche demselben complexen Multiplicationsmodul angehören, hängen also in ganzer linearer Beziehung von einander ab, so dass, wenn, wie es nothwendig ist,

$$a = P + iQ\sqrt{R}$$

gesetzt wird, worin P, Q, R *rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere wesentlich positiv ist,*

$$a' = P' + iQ'\sqrt{R}$$

sein muss, worin P' *und* Q' *wiederum rational sind und* R *die frühere Grösse bedeutet.*

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir wieder zur Gleichung (8.) zurück, in welcher nach den eben gemachten Auseinandersetzungen $\cos\frac{2\pi}{n}$ eine rationale Zahl und $\sin\frac{2\pi}{n}$ die Quadratwurzel aus einer solchen sein muss. Da aber die erste Bedingung die zweite als nothwendige nach sich zieht, und $\cos\frac{2\pi}{n}$, wenn es rational sein soll, nur die Werthe 0, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ haben kann, so wird n nur eine der Zahlen

$$2,\ 3,\ 4,\ 6$$

bedeuten können, und es folgt somit, dass

ein Abelsches Fundamentalintegral der Form

$$\int \psi(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz$$

nur dann auf ein elliptisches Integral reducirbar sein kann, wenn $n = 2, 3, 4, 6$ *ist.*

Diesen vier Fällen entsprechen nach (8.) die Gleichungen

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = -\dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \dfrac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \dfrac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = i\,\dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \dfrac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}, \end{cases}$$

denen als Irrationalitäten der *Abel*schen Integrale die Grössen

$$\sqrt{R(z)},\ \sqrt[3]{R(z)},\ \sqrt[4]{R(z)},\ \sqrt[6]{R(z)}$$

zugeordnet sind.

Der durch die erste der Gleichungen (14.) repräsentirte Fall interessirt uns hier nicht, da er keine weiteren Bedingungen für die Moduln der elliptischen Integrale liefert und sich auf die Frage der Reduction der hyperelliptischen Integrale auf elliptische bezieht, für welche ich einige Punkte in einer früheren Arbeit behandelt habe.

Was die zweite und vierte Gleichung von (14.) betrifft, welche beide, wenn mit 2 multiplicirt und

$$2\frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}}$$

gesetzt wird, durch die Gleichung

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}} = \sqrt{-3}\,\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

ersetzt werden können, so hat *Abel* in seinen „Recherches sur les fonctions elliptiques" die Beziehung aufgestellt

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1+(2+\sqrt{3})^2\zeta^2)}} = \sqrt{-3}\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+(2+\sqrt{3})^2 y^2)}}$$

vermöge der Substitution

$$y = \sqrt{-1}\,.\,\zeta\,\frac{\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\zeta^2}{1+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})\zeta^2},$$

und wir finden somit nach den oben gemachten Auseinandersetzungen in Betreff der Eindeutigkeit der Bestimmung des Moduls der complexen Multiplication bei gegebenem Multiplicator, dass der Modul des elliptischen Integrales in der zweiten und vierten der Gleichungen (14.)

$$\varkappa^2 = -(2+\sqrt{3})^2 \text{ oder } \varkappa = i(2+\sqrt{3})$$

oder ein durch algebraische Transformation des Integrals aus diesem abgeleiteter ist.

Bemerkt man aber ferner, dass die Substitution

$$\zeta^2 = 1-\vartheta^2$$

die Gleichung liefert

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1+(2+\sqrt{3})^2\zeta^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{(1-\vartheta^2)\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\vartheta^2\right)}},$$

so folgt, dass

alle elliptischen Integrale, auf welche sich jene Abelschen Integrale mit den $n = 3$ und $n = 6$ entsprechenden Irrationalitäten reduciren lassen, den Integralmodul

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

oder einen aus diesem transformirten besitzen,
ein Resultat, das für die *dritte* Wurzel aus einem Polynome *dritten* Grades von *Röthig* durch Zurückführung des elliptischen Integrales auf die *Legendre*sche Normalform gefunden worden.

Was die oben aufgestellten elliptischen Integrale betrifft, auf welche die *Abel*schen Integrale

$$J_1 = \int \frac{dz}{\left(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2}\right)^4} \text{ und } J_2 = \int \frac{dz}{\left(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2}\right)^5}$$

reducirbar sind, so ist von dem ersten, welches die Form annahm

$$J_1 = \tfrac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + (x^3 - a)c}},$$

unmittelbar ersichtlich, dass, wenn zur Abkürzung

$$\frac{b^2 - ac}{c} = A$$

gesetzt wird, die Substitution

$$x = y\sqrt[3]{A}$$

dasselbe in

$$\frac{3}{2\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt[6]{A}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$$

überführt, welches wiederum durch die Substitution

$$y = \frac{2\sqrt{3}\,(1-\sqrt{1-t^2}) - t^2(1+\sqrt{3})}{t^2}$$

in die Form

$$\frac{3}{2\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \frac{1}{\sqrt[6]{A}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}^{\,2}\right)t^2\right)}}$$

übergeht und somit den allgemein als nothwendig erkannten complexen Multiplicationsmodul liefert, während das zweite jener beiden Integrale, welches auf

$$J_2 = \tfrac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x(b^2 + (x^3 - a)c)}}$$

reducirt war oder vermöge der Substitution

$$x = y\sqrt[3]{A}$$

auf

$$\frac{3}{2\sqrt{c}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{A}}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^3+1)}},$$

durch die Substitution

$$y = \frac{1}{t}$$

in

$$-\frac{3}{2\sqrt{c}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{A}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$$

und somit in das erstere Integral übergeht, wie dies nach den obigen Auseinandersetzungen nothwendig ist.

Gehen wir endlich zur dritten Gleichung des Systemes (14.) über und bemerken, dass für die algebraische Beziehung

$$\eta = iy$$

die Gleichung besteht

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1+\eta^2)}} = i\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+y^2)}},$$

so folgt für den Modul der zu untersuchenden Gleichung

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = i\,\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

nach den obigen Auseinandersetzungen

$$\varkappa^2 = -1 \text{ oder } \varkappa = i$$

oder ein durch algebraische Transformation des Integrals aus diesem abgeleiteter; da aber

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1+\eta^2)}}$$

vermöge der Substitution

$$\eta^2 = 1 - t^2$$

in

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{1}{2}t^2)}}$$

übergeht, so folgt, dass

alle elliptischen Integrale, auf welche sich jene Abelschen Integrale mit den $n = 4$ entsprechenden Irrationalitäten reduciren lassen, den Integralmodul

$$\sqrt{\frac{1}{2}}$$

oder einen aus diesem transformirten besitzen,

welches Resultat für die vierte Wurzel aus einem Polynome *vierten* Grades ebenfalls an der *Legendre*schen Reductionsformel von *Röthig* erkannt worden.

Es ist wesentlich hinzuzufügen, dass nicht etwa jene Irrationalitäten mit $n = 3$ und $n = 4$ auf die von *Legendre* behandelten Fälle, in welchen das Polynom unter der Wurzel vom dritten resp. vom vierten Grade ist, beschränkt sind, und es mag genügen, als Beispiel das Integral erster Gattung hervorzuheben

$$\int \frac{(z^2-1)\,dz}{\left(\sqrt[3]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_2 z^4 + a_1 z^5 + a_0 z^6}\right)^2},$$

welches in die Form

$$\int \frac{(z^2-1)\,dz}{z^2\left(\sqrt[3]{a_0\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + a_1\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + a_2\left(z + \frac{1}{z}\right) + a_3}\right)^2}$$

gesetzt, durch die Substitution

$$z + \frac{1}{z} = x$$

in das Integral

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{a_0 x^3 + a_1 x^2 + (a_2 - 3a_0)\,x + a_3 - 2a_1}\right)^2}$$

übergeht, welches zur Klasse der von *Legendre* behandelten gehört, und somit auf *ein* elliptisches Integral erster Gattung mit dem complexen Multiplicationsmodul

$$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

reducirbar ist.

Wir können nunmehr die oben gewonnenen Resultate folgendermassen aussprechen:

Wenn ein Abelsches Integral erster Gattung von der Form

$$\int \psi(z) \left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz,$$

worin $n > 2$, *auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, so kann dies nur für*

$$n = 3, 4, 6$$

der Fall sein, und zwar haben die elliptischen Integrale, auf welche sich die Integrale

$$\int \psi(z) \left(\sqrt[3]{R(z)}\right)^r dz, \quad \int \psi(z) \left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^r dz$$

reduciren lassen, den Modul der complexen Multiplication

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

oder einen aus diesem transformirten, während die elliptischen Integrale, auf welche die Abelschen Integrale

$$\int \psi(z) \left(\sqrt[4]{R(z)}\right)^r dz$$

zurückführbar sein können, den complexen Multiplicationsmodul

$$\sqrt{\frac{1}{2}}$$

oder einen aus diesem transformirten besitzen).*

Es mag mit Rücksicht auf eine anderwärts zur Sprache gekommene Frage bemerkt werden, dass für diese Gattung *Abel*scher Integrale, wie aus dem Vorigen zu ersehen, die oben als Fundamentalintegrale bezeichneten nicht etwa auf *verschiedene* elliptische Integrale, sondern stets nur auf *ein* und dasselbe zurückgeführt werden können, und dass ferner nicht dieselbe Transformation zwei zu derselben Irrationalität gehörige Fundamentalintegrale erster Gattung auf eben dieses elliptische Integral zurückführen kann, da die Variable und die Irrationalität des elliptischen Integrales sich rational durch die Variable und die Irrationalität des *Abel*schen Integrales ausdrücken lassen, und somit die für das elliptische Integral ausgeführte Substitution nur auf *ein* solches *Abel*sches Integral führen kann.

Wir gehen nun dazu über, die auf ein elliptisches Integral reducirbaren zur Irrationalität

$$\sqrt[n]{R(z)}$$

*) wobei, wie oben bemerkt worden, stets n und r als relativ prim vorausgesetzt werden.

gehörigen *Abel*schen Integrale zu betrachten, welche durch die Summe mehrerer Fundamentalintegrale erster Gattung dargestellt sind.

Um zuerst einen solchen Fall in einem Beispiele hervorzuheben, sei das Integral erster Gattung

$$\int \frac{dz}{(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2})^7}$$

vorgelegt, welches, wenn

$$\frac{b^2-ac}{c} = A \text{ und } a+2bz+cz^2 = Ay^4$$

gesetzt wird, in

$$\frac{2}{\sqrt{c}} \frac{1}{(\sqrt[6]{A})^3} \frac{dy}{\sqrt{y(y^4+1)}}$$

übergeht; macht man hierin weiter die bekannte *Legendre*sche Substitution

$$y + \frac{1}{y} = 2x \text{ oder } y = x + \sqrt{x^2-1},$$

so erhält man durch eine leichte Rechnung

$$(15.)\quad \int \frac{dz}{(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2})^7} = \frac{1}{\sqrt{c}(\sqrt[6]{A})^3} \left\{ \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2x^2-1)}} \right\};$$

ähnlich erhält man durch dieselbe Substitution

$$(16.)\quad \int \frac{dz}{(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2})^5} = \frac{1}{\sqrt{c}\,\sqrt[6]{A}} \left\{ \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2x^2-1)}} \right\},$$

während das dritte zur Irrationalität

$$\sqrt[6]{a+2bz+cz^2}$$

gehörige Fundamentalintegral erster Gattung vermöge der Substitution

$$a+2bz+cz^2 = -Ax^4$$

die Beziehung liefert

$$(17.)\quad \int \frac{dz}{(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2})^6} = \frac{2}{\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt[4]{-A}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}},$$

in welcher dieses letztere Integral, wie es nach den früheren Sätzen sein muss, die complexe Multiplication mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ hat.

Die Gleichungen (15.) und (16.) liefern zwei Integrale erster Gattung, welche auf je *ein* elliptisches Integral reducirbar sind, nämlich

$$(18.)\quad \frac{1}{\sqrt[4]{A}}\int\frac{dz}{(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2})^5}+\int\frac{dz}{(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2})^7}=\frac{2}{\sqrt{c}}\frac{1}{(\sqrt[8]{A})^3}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}}$$

und

$$(19.)\quad \frac{1}{\sqrt[4]{A}}\int\frac{dz}{(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2})^5}-\int\frac{dz}{(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2})^7}=\frac{2}{\sqrt{c}}\frac{1}{(\sqrt[8]{A})^3}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2x^2-1)}},$$

wie es nach den im Anfange dieser Arbeit gemachten Auseinandersetzungen sein muss, da *jedem* in einer algebraischen Relation zwischen *Abel*schen und elliptischen Integralen vorkommenden elliptischen Integrale ein solches Integral erster Gattung zugehört, das auf je eins der zu den vorkommenden *Abel*schen Integralen gehörigen Integrale erster Gattung reducirbar ist.

Endlich mag noch bemerkt werden, dass, wenn man

$$x=-\xi$$

setzt,

$$(20.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2x^2-1)}}=i\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}}$$

wird, die beiden in der obigen Reductionsformel vorkommenden elliptischen Integrale somit nur in ihren Grenzen verschieden sind und diese daher die Form annimmt

$$(21.)\quad \int\frac{dz}{(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2})^7}=\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{(\sqrt[8]{A})^3}\left\{\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}}-i\int\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}}\right\}$$

$$(22.)\quad \int\frac{dz}{(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2})^5}=\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{\sqrt[8]{A}}\left\{\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}}+i\int\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}}\right\}.$$

Sei allgemein

$$(23.)\quad \psi_{r_1}(z)(\sqrt[n]{R(z)})^{r_1}dz+\psi_{r_2}(z)(\sqrt[n]{R(z)})^{r_2}dz+\cdots+\psi_{r_\nu}(z)(\sqrt[n]{R(z)})^{r_\nu}dz=\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}},$$

worin

$$\varphi(y)=(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2),$$

und y, $\sqrt{\varphi(y)}$ als rationale Functionen von z und $\sqrt[n]{R(z)}$ betrachtet werden dürfen, so wird man wiederum in der Gleichung (23.) die Grösse z willkürliche geschlossene Wege beschreiben lassen können, und wählt man die Wege so aus, dass die Irrationalität $\sqrt[n]{R(z)}$ der Reihe nach die Factoren

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ \alpha^{\nu-1}$$

erhält, worin

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

sein soll, während die Variable und die Irrationalität des elliptischen Integrales, welche rational von z und $\sqrt[n]{R(z)}$ abhängen, in

$$y_1, \sqrt{\varphi(y_1)};\; y_2, \sqrt{\varphi(y_2)};\; \dots\; y_{\nu-1}, \sqrt{\varphi(y_{\nu-1})}$$

übergehen mögen, so ergiebt sich das nachfolgende System von Gleichungen:

$$(24.)\quad \begin{cases} \psi_{r_1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_1} dz + \psi_{r_2}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_2} dz + \cdots \\ \qquad \cdots + \psi_{r_\nu}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_\nu} dz = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \alpha^{r_1}\psi_{r_1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_1} dz + \alpha^{r_2}\psi_{r_2}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_2} dz + \cdots \\ \qquad \cdots + \alpha^{r_\nu}\psi_{r_\nu}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_\nu} dz = \dfrac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} \\ \alpha^{2r_1}\psi_{r_1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_1} dz + \alpha^{2r_2}\psi_{r_2}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_2} dz + \cdots \\ \qquad \cdots + \alpha^{2r_\nu}\psi_{r_\nu}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_\nu} dz = \dfrac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^{(\nu-1)r_1}\psi_{r_1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_1} dz + \alpha^{(\nu-1)r_2}\psi_{r_2}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_2} dz + \cdots \\ \qquad \cdots + \alpha^{(\nu-1)r_\nu}\psi_{r_\nu}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_\nu} dz = \dfrac{dy_{\nu-1}}{\sqrt{\varphi(y_{\nu-1})}}, \end{cases}$$

woraus, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \alpha^{r_1} & \alpha^{r_2} & \alpha^{r_3} & \dots \alpha^{r_\nu} \\ \alpha^{2r_1} & \alpha^{2r_2} & \alpha^{2r_3} & \dots \alpha^{2r_\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(\nu-1)r_1} & \alpha^{(\nu-1)r_2} & \alpha^{(\nu-1)r_3} & \dots \alpha^{(\nu-1)r_\nu} \end{vmatrix},$$

weil α eine primitive $n$te Einheitswurzel ist, nicht verschwindet, für jedes auf der linken Seite der Gleichung (23.) befindliche *Abel*sche Differential ein linearer Ausdruck der auf den rechten Seiten des Systems (24.) befindlichen elliptischen Differentialien folgt, welchen sämmtlich derselbe Modul zukommt, und die sich nur durch die Variable unterscheiden. Wir erhalten somit

$$(25.)\quad \int \psi_{r_\lambda}(z)(\sqrt[n]{R(z)})^{r_\lambda}\,dz = A\int\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} + A_1\int\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \cdots + A_{\nu-1}\int\frac{dy_{\nu-1}}{\sqrt{\varphi(y_{\nu-1})}},$$

worin die

$$A, A_1, \ldots A_{\nu-1}$$

ganze rationale Functionen der $n$ten Einheitswurzeln vorstellen, eine Form des Resultates, wie sie sich auch in dem oben gewählten Beispiel in den Gleichungen (21.) und (22.) bietet; ist eine Zusammenziehung der rechten Seite der Gleichung (25.) zu *einem* elliptischen Integrale möglich, in welchem Falle im Allgemeinen der Integralmodul ein Modul der complexen Multiplication sein müsste, so würde dann wieder nach dem Früheren geschlossen werden dürfen, dass n nur die Zahlen 2, 3, 4, 6 bedeuten darf.

Im Allgemeinen würde sich aus dem Gleichungssysteme (24.), zu dem wir noch die Gleichung

$$(26.)\quad \alpha^{\nu r_1}\psi_{r_1}(z)(\sqrt[n]{R(z)})^{r_1}dz + \alpha^{\nu r_2}\psi_{r_2}(z)(\sqrt[n]{R(z)})^{r_2}dz + \cdots \\ \cdots + \alpha^{\nu r_\nu}\psi_{r_\nu}(z)(\sqrt[n]{R(z)})^{r_\nu}dz = \frac{dy_\nu}{\sqrt{\varphi(y_\nu)}}$$

hinzunehmen, durch Elimination aller *Abel*schen Differentialien die Beziehung ergeben

$$(27.)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \alpha^{r_1} & \alpha^{r_2} & \alpha^{r_3} & \ldots & \alpha^{r_\nu} & \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} \\ \alpha^{2r_1} & \alpha^{2r_2} & \alpha^{2r_3} & \ldots & \alpha^{2r_\nu} & \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{\nu r_1} & \alpha^{\nu r_2} & \alpha^{\nu r_3} & \ldots & \alpha^{\nu r_\nu} & \frac{dy_\nu}{\sqrt{\varphi(y_\nu)}} \end{vmatrix} = 0,$$

eine lineare Gleichung zwischen $\nu+1$ elliptischen Differentialien mit demselben Modul, deren Variabeln und Irrationalitäten rationale Functionen von z und $\sqrt[n]{R(z)}$ sind, wobei y_k und $\sqrt{\varphi(y_k)}$ aus den Werthen für y und $\sqrt{\varphi(y)}$ dadurch erhalten werden, dass in den in z und $\sqrt[n]{R(z)}$ rationalen Ausdrücken $\alpha^k\sqrt[n]{R(z)}$ statt $\sqrt[n]{R(z)}$ gesetzt wird.

Die Beziehung (27.) wird zu untersuchen und zu fragen sein, ob aus derselben Bedingungen für den Modul der elliptischen Differentialien, welcher in den oben behandelten Fällen der Reduction der Fundamentalintegrale ein Modul der complexen Multiplication sein musste, abgeleitet werden können.

Nehmen wir zuerst an, dass $\nu = n-1$ und also die Summe von $n-1$ Fundamentalintegralen einem elliptischen Integrale gleich ist, so geht die Gleichung (27.), da die Zahlen $r_1, r_2, \dots r_{n-1}$ nichts anderes als $1, 2, \dots n-1$ bedeuten, in die folgende über

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{n-1} & \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} \\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{2(n-1)} & \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{2(n-1)} & \alpha^{3(n-1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-1)} & \frac{dy_{n-1}}{\sqrt{\varphi(y_{n-1})}} \end{vmatrix} = 0,$$

welche, wenn alle Horizontalreihen zur ersten addirt werden, da die hier vorkommenden Potenzsummen der Einheitswurzeln verschwinden, die Form annimmt

$$(28.)\qquad \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} + \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} + \dots + \frac{dy_{n-1}}{\sqrt{\varphi(y_{n-1})}} = 0,$$

und aus dieser Gleichung gehen nur Beziehungen zwischen den Variabeln hervor, ohne den Modul des elliptischen Differentials Bedingungen zu unterwerfen.

Ist $\nu < n-1$, so kann die Gleichung (27.) ebenfalls eine der Gleichung (28.) ähnliche Bedingungsgleichung liefern, in welcher die einzelnen elliptischen Differentialien nur mit rationalen Zahlenfactoren behaftet sind, und aus der somit für die Beschaffenheit der Moduln ein weiterer Schluss nicht gezogen werden kann. So besteht in dem oben behandelten Beispiel die Beziehung

$$(29.)\qquad \frac{1}{\sqrt[4]{A}} \frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^5} + \frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^7} = \frac{2}{\sqrt{c}} \frac{1}{\left(\sqrt[8]{A}\right)^3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}},$$

für welche

$$(30.)\qquad x = \frac{1}{2\sqrt[4]{A}}\sqrt[4]{a+2bz+cz^2} + \frac{\sqrt[4]{A}}{2}\,\frac{1}{\sqrt[4]{a+2bz+cz^2}}$$

war, und die durch eine zweimalige Umkreisung einer der Lösungen des Polynoms

$$a+2bz+cz^2$$

in

$$(31.)\quad \frac{1}{\sqrt[4]{A}}e^{-\frac{\pi i}{2}}\frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^5} + e^{\frac{\pi i}{2}}\frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^7} = \frac{2}{\sqrt{c}}\,\frac{1}{\left(\sqrt[8]{A}\right)^3}\,\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}}$$

übergeht, wofür aus (30.)

$$(32.)\qquad \xi = -\frac{1}{2\sqrt[4]{A}}\sqrt[4]{a+2bz+cz^2} - \frac{\sqrt[4]{A}}{2}\,\frac{1}{\sqrt[4]{a+2bz+cz^2}}$$

folgt; lässt man ferner die Variable z noch einen zweimaligen Umkreis um einen Verzweigungspunkt machen, so ergiebt sich

$$(33.)\quad -\frac{1}{\sqrt[4]{A}}\,\frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^5} - \frac{dz}{\left(\sqrt[8]{a+2bz+cz^2}\right)^7} = \frac{2}{\sqrt{c}}\,\frac{1}{\left(\sqrt[8]{A}\right)^3}\,\frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-1)(2\eta^2-1)}},$$

worin

$$(34.)\qquad \eta = \frac{1}{2\sqrt[4]{A}}\sqrt[4]{a+2bz+cz^2} + \frac{\sqrt[4]{A}}{2}\,\frac{1}{\sqrt[4]{a+2bz+cz^2}}$$

ist. Die Gleichungen (29.), (31.), (33.) liefern durch Elimination der *Abel*schen Differentiale die Beziehung

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}} + \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-1)(2\eta^2-1)}} = 0,$$

welche Gleichung, da aus den obigen Beziehungen unmittelbar

$$x = \eta,\ \sqrt{(x-1)(2x^2-1)} = -\sqrt{(\eta-1)(2\eta^2-1)}$$

folgt, identisch befriedigt wird.

Aber es kann auch eine mit complexen Multiplicatoren der elliptischen Differentiale versehene Beziehungsgleichung abgeleitet werden; umkreisen wir nämlich nach einander einen Verzweigungspunkt nur einmal und setzen zur Abkürzung

$$a+2bz+cz^2 = R(z),\quad (x-1)(2x^2-1) = \varphi(x),$$

so lauten die drei Gleichungen

$$(35.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{A}}\dfrac{dz}{(\sqrt[8]{R(z)})^5} + \dfrac{dz}{(\sqrt[8]{R(z)})^7} = \dfrac{2}{\sqrt{c}}\dfrac{1}{(\sqrt[8]{A})^3}\dfrac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}, \\ -e^{-\frac{\pi i}{4}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{A}}\dfrac{dz}{(\sqrt[8]{R(z)})^5} + e^{\frac{\pi i}{4}}\dfrac{dz}{(\sqrt[8]{R(z)})^7} = \dfrac{2}{\sqrt{c}}\dfrac{1}{(\sqrt[8]{A})^3}\dfrac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}, \\ e^{-\frac{\pi i}{2}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{A}}\dfrac{dz}{(\sqrt[8]{R(z)})^5} + e^{\frac{\pi i}{2}}\dfrac{dz}{(\sqrt[8]{R(z)})^7} = \dfrac{2}{\sqrt{c}}\dfrac{1}{(\sqrt[8]{A})^3}\dfrac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} \end{cases}$$

für die Beziehungen

$$(36.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{A}}\sqrt[4]{R(z)} + \dfrac{\sqrt[4]{A}}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{R(z)}}, \\ \xi = \dfrac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{2\sqrt[4]{A}}\sqrt[4]{R(z)} + \dfrac{e^{-\frac{\pi i}{2}}\sqrt[4]{A}}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{R(z)}}, \\ \eta = -\dfrac{1}{2\sqrt[4]{A}}\sqrt[4]{R(z)} - \dfrac{\sqrt[4]{A}}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{R(z)}}. \end{cases}$$

Aus (35.) folgt durch Elimination der *Abel*schen Differentiale

$$(37.)\quad \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \left(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = 0,$$

eine Gleichung, in welcher *ein* Coefficient der elliptischen Differentiale eine complexe Grösse ist, und die in die Form gesetzt werden kann

$$(38.)\quad \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + i\sqrt{2}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = 0,$$

in welcher

$$x,\ \sqrt{\varphi(x)},\ \xi,\ \sqrt{\varphi(\xi)},\ \eta,\ \sqrt{\varphi(\eta)}$$

algebraisch mit einander verbunden sind.

Die Gleichung (38.) zeigt, dass, wenn

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} - \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}}$$

gesetzt wird,

$$(39.) \qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}} = i\sqrt{2}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

ist, und aus dieser Gleichung geht hervor, dass das elliptische Integral

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}}$$

eine complexe Multiplication zulässt. In der That liefern die bekannten linearen Transformationsformeln eines elliptischen Integrales auf die Normalform die Beziehung

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}} = \frac{1}{M}\,\frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-\varkappa^2X^2)}},$$

worin

$$\varkappa = \sqrt{2}-1$$

und

$$M = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ist; nun führt aber eine der Theorie der Transformation zweiten Grades angehörige Beziehung

$$\sin\operatorname{am}\left[(1+\varkappa)\,iu, \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right] = \frac{i(1+\varkappa)\sin\operatorname{am}(u,\varkappa)}{\cos\operatorname{am}(u,\varkappa)\,\Delta\operatorname{am}(u,\varkappa)}$$

unmittelbar auf die Substitution

$$X = \frac{\sqrt{-2}\;Y}{\sqrt{(1-Y^2)(1-\varkappa^2Y^2)}},$$

welche, wie man mit Benutzung des Werthes von $\varkappa$, für welchen

$$\varkappa = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$$

ist, unmittelbar sieht, die Gleichung liefert

$$\frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-\varkappa^2X^2)}} = \sqrt{-2}\,\frac{dY}{\sqrt{(1-Y^2)(1-\varkappa^2Y^2)}};$$

es ist somit die Existenz der complexen Multiplication für den Multiplicator $i\sqrt{2}$ der Gleichung (39.) gemäss nachgewiesen.

In Folge der oben entwickelten Beziehung (20.) findet also auch mit demselben complexen Multiplicator eine Multiplication für das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2x^2-1)}}$$

statt.

Diese Betrachtung, d. h. die Untersuchung der Eigenschaften der elliptischen Integrale, auf welche *Abel*sche Integrale der obigen Form reducirbar sind, kann auf allgemeinere Fälle ausgedehnt werden.

Es werde der Fall betrachtet, in welchem die Summe *zweier* Fundamentalintegrale sich zu *einem* elliptischen Integrale zusammensetzt, also die Beziehung besteht

$$(40.)\qquad \psi_{r_1}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_1} dz + \psi_{r_2}(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^{r_2} dz = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}},$$

dann geht, da $\nu = 2$ ist, die Determinante (27.) in

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \alpha^{r_1} & \alpha^{r_2} & \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} \\ \alpha^{2r_1} & \alpha^{2r_2} & \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} \end{vmatrix} = 0$$

über oder in

$$(41.)\qquad \alpha^{r_1+r_2}\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} - (\alpha^{r_1} + \alpha^{r_2})\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} = 0.$$

Um nun den Fall hervorzuheben, dem sich das vorher gewählte Beispiel anschliesst, werde

$$\alpha^{r_1+r_2} = \pm 1$$

angenommen, also für die Gleichung (40.) die Voraussetzung gemacht, dass

$$r_1 + r_2 = n \text{ oder } r_1 + r_2 = \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}$$

ist.

Im *ersten* Falle geht die Gleichung (40.) in

$$\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} - (\alpha^{r_1} + \alpha^{-r_1})\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} = 0$$

oder durch Zusammenfassen der beiden elliptischen Differentiale in

$$(42.)\qquad \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = (\alpha^{r_1} + \alpha^{-r_1})\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}}$$

über, welcher auch die Form gegeben werden kann

$$(43.)\qquad \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = 2\cos\frac{2\pi r_1}{n}\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}},$$

woraus folgt, dass $\cos\frac{2\pi r_1}{n}$ eine rationale Zahl sein muss; man sieht unmittelbar, dass dies nur für

$$r_1 = \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3}, \frac{n}{4}, \frac{3n}{4}, \frac{n}{6}, \frac{5n}{6}$$

der Fall sein kann, wofür dann

$$r_2 = \frac{n}{2}, \frac{2n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{3n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{5n}{6}, \frac{n}{6}$$

wird, und es beschränkt sich somit diese Annahme auf die Formen

$$(44.)\quad \begin{cases} \psi_1(z)\sqrt{R(z)} + \psi_2(z)\sqrt{R(z)} = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\sqrt[3]{R(z)} + \psi_2(z)\left(\sqrt[3]{R(z)}\right)^2 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\sqrt[4]{R(z)} + \psi_2(z)\left(\sqrt[4]{R(z)}\right)^3 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\sqrt[6]{R(z)} + \psi_2(z)\left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^5 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}, \end{cases}$$

genau die oben bei der Behandlung der Reduction *eines Abel*schen Fundamentalintegrales auf ein elliptisches gefundenen Fälle der Irrationalitäten; für die Eigenschaft des elliptischen Integrales lässt sich aus der Gleichung (43.) nichts weiter herleiten.

Im *zweiten* Falle, in welchem n eine grade Zahl sein muss, nimmt die Gleichung (41.) die Form an

$$-\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} - \left(\alpha^{r_1} + \alpha^{\frac{n}{2}-r_1}\right)\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} = 0$$

und

$$-\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} - \left(\alpha^{r_1} + \alpha^{\frac{3n}{2}-r_1}\right)\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} = 0,$$

oder auch nach Zusammenfassung der ersten und dritten Differentiale

$$(45.)\quad \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} = 2i\sin\frac{2\pi r_1}{n}\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}};$$

da der Fall $r_1 = \frac{n}{2}$ also $r_2 = 0$ oder n auszuschliessen ist, so muss nach

den früheren die complexe Multiplication betreffenden Auseinandersetzungen

$$\sin\frac{2\pi r_1}{n}$$

die Quadratwurzel aus einer rationalen positiven Zahl sein, wobei zu bemerken, dass n eine grade Zahl war — für $n=8$, $r_1=5$ ist $2i\sin\frac{2\pi r_1}{n} = -\sqrt{-2}$, wie es in der That in dem oben gewählten Beispiel der Fall war. Nun ist aber

$$\cos\frac{4\pi r_1}{n} = 1-2\sin^2\frac{2\pi r_1}{n}$$

und somit eine rationale Zahl und umgekehrt, so dass nach Früherem

$$r_1 = \frac{n}{3},\ \frac{2n}{3},\ \frac{n}{4},\ \frac{3n}{4},\ \frac{n}{6},\ \frac{5n}{6},\ \frac{n}{8},\ \frac{3n}{8},\ \frac{5n}{8},\ \frac{7n}{8},\ \frac{n}{12},\ \frac{5n}{12},\ \frac{7n}{12},\ \frac{11n}{12}$$

$$r_2 = \frac{n}{6},\ \frac{5n}{6},\ \frac{n}{4},\ \frac{3n}{4},\ \frac{n}{3},\ \frac{2n}{3},\ \frac{3n}{8},\ \frac{n}{8},\ \frac{7n}{8},\ \frac{5n}{8},\ \frac{5n}{12},\ \frac{n}{12},\ \frac{11n}{12},\ \frac{7n}{12}$$

folgt, und somit als die einzig möglichen Fälle sich die nachstehenden ergeben:

$$(46.)\quad \begin{cases} \psi_1(z)\sqrt[6]{R(z)} + \psi_2(z)\left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^2 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^4 + \psi_2(z)\left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^5 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\sqrt[8]{R(z)} + \psi_2(z)\left(\sqrt[8]{R(z)}\right)^3 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\left(\sqrt[8]{R(z)}\right)^5 + \psi_2(z)\left(\sqrt[8]{R(z)}\right)^7 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\sqrt[12]{R(z)} + \psi_2(z)\left(\sqrt[12]{R(z)}\right)^5 = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \psi_1(z)\left(\sqrt[12]{R(z)}\right)^7 + \psi_2(z)\left(\sqrt[12]{R(z)}\right)^{11} = \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}, \end{cases}$$

wofür die elliptischen Integrale eine complexe Multiplication besitzen mit den für je zwei aufeinanderfolgende gültigen resp. Multiplicatoren

$$i\sqrt{3},\quad i\sqrt{2},\quad i$$

und somit auf Integrale mit den Moduln

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},\quad \sqrt{2}-1,\quad \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

reducirt werden können.

Da für die anderen in diesen Formen vorkommenden Irrationalitäten bereits oben specielle Fälle behandelt worden, so wollen wir nur noch ein zur Irrationalität $\sqrt[12]{R(z)}$ gehöriges Beispiel anführen.

Das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}}}$$

ist nach den oben aufgestellten Criterien ein Integral erster Gattung; setzt man

$$x = (x+1)z^3 \text{ oder } x = \frac{z^3}{1-z^3},$$

so wird

$$\frac{dx}{\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}}} = \frac{3z\,dz}{(\sqrt[4]{1-z^3})^3}$$

oder für die Substitution

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

die Beziehung

$$\frac{dx}{\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}}} = -\frac{3\,d\zeta}{(\sqrt[4]{\zeta(\zeta^3-1)})^3}.$$

Wird nun

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

gesetzt, und die Substitution angewandt

$$\zeta = \frac{\varepsilon(1-y)}{2\varepsilon+1+y},$$

so folgt, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$\frac{dx}{\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}}} = m\frac{(2\varepsilon+1+y)\,dy}{(\sqrt[4]{(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2)})^3},$$

wenn

$$\varkappa^2 = -\frac{1}{8\varepsilon+3}, \quad m = \frac{6\varepsilon(\varepsilon+1)}{(\sqrt[4]{-\varepsilon(\varepsilon+1)(8\varepsilon+3)})^3}.$$

Macht man ferner für das Integral

$$\frac{dy}{(\sqrt[4]{(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2)})^3}$$

die bekannten *Legendre*schen Substitutionen, so gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{dy}{\left(\sqrt[4]{(1-y^2)(1-x^2y^2)}\right)^3} = \mu_1 \frac{dY_1}{\sqrt{(1-Y_1^2)\,(1-\frac{1}{2}Y_1^2)}},$$

und wendet man ebenso auf das zweite Integral eine andere bekannte *Legendre*sche Substitution an, so ergiebt sich

$$\frac{y\,dy}{\left(\sqrt[4]{(1-y^2)(1-x^2y^2)}\right)^3} = \mu_2 \frac{dY_2}{\sqrt{(1-Y_2^2)\,(1-\frac{1}{2}Y_2^2)}},$$

woraus sodann

$$\text{(47.)} \quad \frac{dx}{\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}}} = A_1 \frac{dY_1}{\sqrt{(1-Y_1^2)(1-\frac{1}{2}Y_1^2)}} + A_2 \frac{dY_2}{\sqrt{(1-Y_2^2)(1-\frac{1}{2}Y_2^2)}}$$

folgt.

Geht man jedoch von dem Integrale erster Gattung

$$\int \frac{x\,(x+1)^4\,dx}{\left(\sqrt[12]{x^4\,(x+1)^{11}}\right)^5}$$

aus und wendet auf dasselbe dieselben Substitutionen

$$x = \frac{z^3}{1-z^3}, \quad z = \frac{1}{\zeta}$$

an, so folgt

$$\frac{x\,(x+1)^4\,dx}{\left(\sqrt[12]{x^4\,(x+1)^{11}}\right)^5} = \frac{3\,dz}{\left(\sqrt[4]{(1-z^3)}\right)^3} = -\frac{3\,\zeta\,d\zeta}{\left(\sqrt[4]{\zeta(\zeta^3-1)}\right)^3},$$

und wenn wieder dieselbe Beziehung zwischen ζ und y wie oben benutzt wird,

$$\frac{x\,(x+1)^4\,dx}{\left(\sqrt[12]{x^4\,(x+1)^{11}}\right)^5} = m \frac{(\varepsilon-\varepsilon y)\,dy}{\left(\sqrt[4]{(1-y^2)(1-x^2y^2)}\right)^3},$$

und daher ähnlich wie oben

$$\text{(48.)} \quad \frac{x\,(x+1)^4\,dx}{\left(\sqrt[12]{x^4\,(x+1)^{11}}\right)^5} = B_1 \frac{dY_1}{\sqrt{(1-Y_1^2)\,(1-\frac{1}{2}Y_1^2)}} + B_2 \frac{dY_2}{\sqrt{(1-Y_2^2)\,(1-\frac{1}{2}Y_2^2)}}.$$

Die Gleichungen (47.) und (48.) liefern nun das Resultat

$$\text{(49.)} \quad B_2 \int \frac{dx}{\sqrt[12]{x^4(x+1)^{11}}} - A_2 \int \frac{x\,(x+1)^4\,dx}{\left(\sqrt[12]{x^4\,(x+1)^{11}}\right)^5} = (A_1B_2 - A_2B_1) \int \frac{dY_1}{\sqrt{(1-Y_1^2)(1-\frac{1}{2}Y_1^2)}},$$

also die Summe zweier Fundamentalintegrale auf *ein* elliptisches Integral mit complexer Multiplication zurückführbar.

Ist nun die Grösse $\alpha^{r_1+r_2}$ in der Gleichung (41.) nicht reell, sollen also andere Verbindungen von zwei *Abel*schen Fundamentalintegralen der obigen Art als solche, in denen die Exponenten der Irrationalität $\sqrt[n]{R(z)}$ sich zu n oder $\frac{n}{2}$ oder $\frac{3n}{2}$ ergänzen, einem elliptischen Integrale gleich sein, so können aus der Gleichung (41.) unmittelbar weitere Folgerungen nicht hergeleitet werden; wie in diesem Falle zu verfahren, soll nun jetzt an der allgemeinen Gleichung (27.) gezeigt werden, welche in die Form

$$(50.)\quad A\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}+A_1\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}}+A_2\frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}}+\cdots+A_\nu\frac{dy_\nu}{\sqrt{\varphi(y_\nu)}}=0$$

gesetzt werden mag, worin

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_\nu$$

die Unterdeterminanten bezeichnen, welche aus den Potenzen der $n$ten Einheitswurzel α zusammengesetzt sind, und für welche, wie leicht zu sehen,

$$A=(-1)^\nu A_\nu\,\alpha^{r_1+r_2+\cdots+r_\nu}$$

ist. Da y und $\sqrt{\varphi(y)}$ bekanntlich als rationale Functionen von z und $\sqrt[n]{R(z)}$ betrachtet werden dürfen, und

$$y_1,\ \sqrt{\varphi(y_1)};\ \ y_2,\ \sqrt{\varphi(y_2)};\ \ldots\ y_\nu,\ \sqrt{\varphi(y_\nu)}$$

aus eben diesen Functionen dadurch hervorgehen, dass an die Stelle von $\sqrt[n]{R(z)}$ resp.

$$\alpha\sqrt[n]{R(z)},\ \alpha^2\sqrt[n]{R(z)},\ \ldots\ \alpha^\nu\sqrt[n]{R(z)}$$

gesetzt wird, so werden

$$y_1, y_2, \ldots y_\nu$$

im Allgemeinen algebraische Functionen von y sein, und wenn man die Gleichung (50.) in die Form setzt

$$A\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}=-A_1\frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}}-A_2\frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}}-\cdots-A_\nu\frac{dy_\nu}{\sqrt{\varphi(y_\nu)}},$$

so folgt nach einem von *Abel* gegebenen Theorem die Beziehung

$$(51.)\quad \delta A \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = -A_1 \frac{dY_1}{\sqrt{\varphi(Y_1)}} - \cdots - A_\nu \frac{dY_\nu}{\sqrt{\varphi(Y_\nu)}},$$

in welcher δ eine positive ganze Zahl, die Grössen

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \dots\ A_\nu$$

dieselben Constanten wie früher bedeuten, und

$$Y_1,\ Y_2,\ \dots\ Y_\nu$$

$$\sqrt{\varphi(Y_1)},\ \sqrt{\varphi(Y_2)},\ \dots\ \sqrt{\varphi(Y_\nu)}$$

rationale Functionen von y und $\sqrt{\varphi(y)}$ sind.

Wenn aber Y_α und $\sqrt{\varphi(Y_\alpha)}$ rationale Functionen von y und $\sqrt{\varphi(y)}$ bedeuten, so folgt, dass

$$\frac{dY_\alpha}{\sqrt{\varphi(Y_\alpha)}} = f(y, \sqrt{\varphi(y)})\, dy,$$

worin f eine rationale Function vorstellt, und somit, weil die linke Seite das Differential eines Integrales erster Gattung darstellt, also dasselbe auch für die rechte Seite stattfinden muss,

$$(52.)\quad \frac{dY_\alpha}{\sqrt{\varphi(Y_\alpha)}} = m_\alpha \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}},$$

worin m_α, da die Polynome unter dem Wurzelzeichen dieselben sind, die Gleichung (52.) also eine Multiplicationsgleichung mit rationaler Beziehung definirt, wie oben gefunden worden, wenn es reell ist, eine ganze Zahl bedeutet, und wenn es imaginär ist, die Form

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_\alpha + i\sqrt{\mu_\alpha})$$

haben wird, worin λ_α und μ_α ebenfalls ganze Zahlen vorstellen, von denen die letztere wesentlich positiv ist.

Die Gleichung (51.) nimmt somit die Form an

$$(53.)\quad A\delta + m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_\nu A_\nu = 0,$$

und es fragt sich, ob aus dieser der hypothetisch angenommenen Gleichung (23.) entsprungenen Beziehung irgend welche Folgerungen hergeleitet werden können.

Um sogleich von dieser Beziehung auf den vorher betrachteten

Fall, in welchem die Summe zweier *Abel*scher Fundamentalintegrale einem elliptischen Integrale gleich sein sollte, eine Anwendung zu machen, gehen wir zur Gleichung (41.) zurück, aus welcher der zuletzt erhaltenen Gleichung (53.) gemäss die Beziehung hervorgeht

$$(54.)\qquad \delta\alpha^{r_1+r_2} - m_1(\alpha^{r_1}+\alpha^{r_2}) + m_2 = 0;$$

nehmen wir nun an, es könnten die reducirten elliptischen Integrale so beschaffen sein, dass sie *keine* complexe Multiplication zulassen, so würden nach den obigen Auseinandersetzungen δ, m_1, m_2 ganze Zahlen bedeuten, und somit (54.) als eine ganzzahlige Gleichung aufgefasst werden können, deren eine Lösung α ist.

Man sieht schon hieraus, dass n nicht eine Primzahl sein kann, welche grösser als 3 ist; denn da man die Potenz $\alpha^{r_1+r_2}$ auf eine erniedrigen kann, deren Exponent kleiner als n ist, so würde α einer ganzzahligen Gleichung genügen, welche ausser der Constanten nur drei α-Potenzen enthält, deren Exponenten kleiner als n sind; man weiss aber, dass, wenn n eine Primzahl, die Gleichung

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0$$

eine irreductible ist, und in Folge dessen ist die gemachte Annahme unmöglich.

Wir können ferner unter derselben Voraussetzung, dass m_1 und m_2 ganze Zahlen sind, die Form der Gleichung (54.) noch vereinfachen; führt man nämlich

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

in dieselbe ein und setzt die reellen und imaginären Theile der Gleichung einzeln gleich Null, so folgt

$$\delta\cos\frac{2\pi(r_1+r_2)}{n} - m_1\left(\cos\frac{2\pi r_1}{n} + \cos\frac{2\pi r_2}{n}\right) + m_2 = 0$$

und

$$\delta\sin\frac{2\pi(r_1+r_2)}{n} - m_1\left(\sin\frac{2\pi r_1}{n} + \sin\frac{2\pi r_2}{n}\right) = 0,$$

und da die letztere dieser beiden Gleichungen unmittelbar in

$$\delta\cos\frac{\pi(r_1+r_2)}{n} = m_1\cos\frac{\pi(r_1-r_2)}{n}$$

übergeht, so liefert die erstere die Beziehung

$$m_2 = \delta,$$

so dass statt der Gleichung (54.) die aequivalente

$$(55.)\qquad \delta\,(\alpha^{r_1+r_2}+1) = m_1\,(\alpha^{r_1}+\alpha^{r_2})$$

der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt werden kann.

Man sieht aber leicht, dass dieser Gleichung durch unendlich viele zusammengesetzte n genügt werden kann; so wird

$$n = 2^k,$$

wie unmittelbar zu sehen, der Gleichung genügen

$$\alpha^{2^{k-1}+1}+1 = -\alpha^{2^{k-1}}-\alpha$$

d. h. die Gleichung (55.) wird erfüllt sein für

$$n = 2^k,\ m_1 = -1,\ \delta = 1,\ r_1 = 2^{k-1},\ r_2 = 1$$

und daher wird für die Irrationalitäten

$$\sqrt[2^k]{R(z)}$$

aus der Gleichung (55.) nicht geschlossen werden können, dass sie, wenn die Summe zweier zu ihnen gehöriger Fundamentalintegrale auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, auf solche elliptische Integrale führen müsse, welche eine complexe Multiplication zulassen.

Genau in der im vorliegenden Falle angegebenen Weise wird man auch allgemein unter der Annahme, dass

$$m_1,\ m_2,\ \dots\ m_\nu$$

reell also nach dem Früheren ganze Zahlen sind, die Gleichung (53.) untersuchen und nachsehen, ob für ein gegebenes n die ganzzahlige Gleichung in α mit der zugehörigen Kreistheilungsgleichung im Einklang steht.

Wird jedoch die Möglichkeit complexer Werthe der m, also die Existenz einer complexen Multiplication für die in der Reductionsformel vorkommenden elliptischen Integrale zugelassen, so wird die Gleichung (53.) die Form annehmen

$$(56.)\qquad 2\delta A + (\lambda_1 + i\sqrt{\mu_1})\,A_1 + (\lambda_2 + i\sqrt{\mu_2})\,A_2 + \cdots + (\lambda_\nu + i\sqrt{\mu_\nu})\,A_\nu = 0,$$

in welcher

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ \lambda_\nu$$

ganze Zahlen,

$$\delta,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \dots\ \mu_\nu$$

positive ganze Zahlen bedeuten, und es wird die Frage entstehen, ob diese Gleichung mit der zu n gehörigen Kreistheilungsgleichung vereinbar ist. Bekanntlich gestattet die einem ungraden n zugehörige Kreistheilungsgleichung eine Reduction auf eine Gleichung vom Grade $\frac{n-1}{2}$, deren Coefficienten Lösungen von ganzzahligen quadratischen Gleichungen sind, welchen die Irrationalität

$$\sqrt{n} \text{ oder } \sqrt{-n}$$

zugehört, je nachdem

$$n \equiv 1 \text{ oder } \equiv 3 \text{ mod. } 4$$

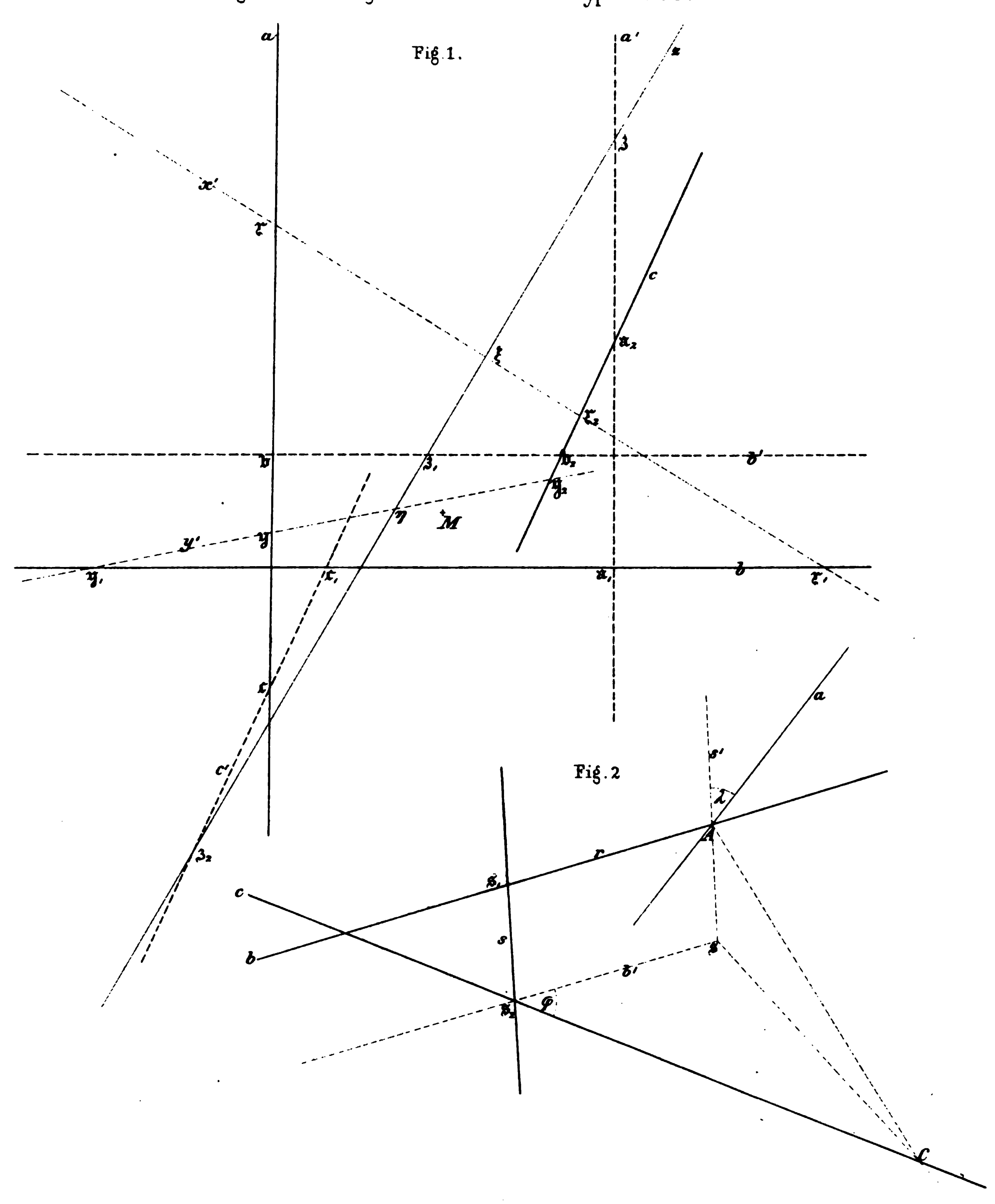
ist, und die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der Gleichung (56.) wird die Möglichkeit der Existenz der Gleichung (56.) und die Bedingungen für diese Existenz erkennen lassen.

Ich beabsichtige nicht, diese im letzteren Theile der Arbeit angezeigte Untersuchung allgemein durchzuführen, es genügt mir, die Verknüpfung zweier scheinbar auseinander liegender Fragen, der complexen Multiplication der elliptischen Integrale und der Reduction bestimmter Klassen *Abel*scher Integrale auf elliptische, gezeigt zu haben, und ich hoffe bei anderer Gelegenheit auf ähnliche Fragen allgemeinerer Natur zurückzukommen.

Wien, im October 1878.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin.

Figuren zu H. Vogt, über ein besonderes Hyperboloid.



STORAGE AR

